1. Un blocchetto di 25 g viene lanciato a 2,0 m/s su un piano orizzontale privo di attrito mediante una molla compressa di 2,0 cm. Quale velocità raggiunge il blocchetto se è lanciato dalla stessa molla però compressa di 4,0 cm? Se il blocchetto, avesse una massa doppia, come cambierebbe il risultato?

$$m = 25\ g \qquad v_1 = 2{,}0\ m/s \qquad x_1 = 2{,}0\ cm \qquad x_2 = 4{,}0\ cm \qquad v_2? \qquad m_2 = 2\ m \qquad v_3?$$

L'energia potenziale della molla viene trasformata in energia cinetica:

$$U_1 = K_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad k = m\left(\frac{v_1}{x_1}\right)^2$$

Allo stesso modo quando la molla viene compressa di un tratto x_2:

$$U_2 = K_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = x_2\sqrt{\frac{k}{m}} = x_2\sqrt{m\frac{\left(\frac{v_1}{x_1}\right)^2}{m}} = \frac{x_2}{x_1}v_1 = \mathbf{4,0\ m/s}$$

Come si può vedere dal risultato, la velocità finale non dipende dalla massa del blocchetto, perciò se il blocchetto avesse una massa doppia, il risultato non cambierebbe.

2. Un'autocisterna di $1{,}2 \cdot 10^4\ kg$ con i freni rotti imbocca a 130 km/h una rampa di emergenza in contropendenza e priva di attrito con inclinazione di 15°.
   A. Qual è la lunghezza minima della rampa che consente all'autocisterna di fermarsi?

   Stabilisci se la lunghezza minima aumenta, diminuisce o resta uguale se:

   B. l'autocisterna ha massa minore
   C. la sua velocità è inferiore

$$m = 1{,}2 \cdot 10^4\ kg \qquad v_o = 130\ km/h \qquad \alpha = 15° \qquad L? \qquad m_1 < m? \qquad L_1? \qquad v_2 < v_o \qquad L_2?$$

A. Indico la base della rampa come punto iniziale, con v_o dato e $h_o = 0\ m$. Indico l'altezza minima alla quale l'autocisterna risulta ferma, con $v = 0\ m/s$ e $h = L\sin\alpha$. Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\begin{cases} U_o + K_o = U + K \\ U_o = 0\ J \ \wedge \ K = 0\ J \end{cases} \Rightarrow \quad K_o = U \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_o^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_o^2}{2g} = L\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad L = \frac{v_o^2}{2g\sin\alpha} = \mathbf{2,6 \cdot 10^2\ m}$$

B. Siccome la lunghezza della rampa percorsa per fermarsi non dipende dalla massa dell'autocisterna, anche se questa avrà massa minore, lo spazio di frenata non cambierà.

C. Siccome la lunghezza della rampa percorsa per fermarsi è direttamente proporzionale al quadrato della velocità, diminuendo la velocità, diminuirà anche la lunghezza della rampa.

3. Un padre che sta gareggiando con suo figlio ha un'energia cinetica pari alla metà di quella del figlio, la cui massa è metà di quella del padre. Questi accresce la propria velocità di 1 m/s, arrivando così ad avere la stessa energia cinetica del figlio. Quali erano le loro velocità iniziali?

$$m_F = \frac{1}{2}m_P \qquad K_{oP} = \frac{1}{2}K_{oF} \qquad v_P - v_{oP} = 1\ m/s \qquad K_P = K_F \qquad v_{oF}? \qquad v_{oP}?$$

$$K_{oP} = \frac{1}{2}K_{oF} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_P v_{oP}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_F v_{oF}^2 \quad \Rightarrow \quad m_P v_{oP}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_P v_{oF}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{oP} = \frac{v_{oF}}{2}$$

$$K_P = K_F \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_P v_P^2 = \frac{1}{2}m_F v_{oF}^2 \quad \Rightarrow \quad m_P v_P^2 = \frac{1}{2}m_P v_{oF}^2 \quad \Rightarrow \quad v_P = \frac{v_{oF}}{\sqrt{2}}$$

Sapendo che $v_P - v_{oP} = 1\ m/s$, posso determinare la velocità iniziale del figlio:

$$v_P - v_{oP} = \frac{v_{oF}}{\sqrt{2}} - \frac{v_{oF}}{2} = \frac{v_{oF}(2-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad v_{oF} = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot 1\ m/s = \mathbf{4,8\ m/s} \qquad v_{oP} = \frac{v_{oF}}{2} = \mathbf{2,4\ m/s}$$

4. Una bambina che pesa 267 N percorre uno scivolo lungo 6,1 m e inclinato di 20° rispetto al piano orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico è 0,10.
   A. Quanta energia si trasforma in energia termica per azione della forza di attrito?
   B. Qual è la velocità della bambina all'arrivo se parte dall'alto con una velocità di 0,457 m/s?

$$P = 267\,N \qquad L = 6{,}1\,m \qquad \alpha = 20° \qquad \mu = 0{,}10 \qquad E? \qquad v_o = 0{,}457\,m/s \qquad v?$$

A. L'energia termica è data dal valore assoluto dell'energia non conservativa, ovvero del lavoro compiuto dalla forza d'attrito:

$$E = |L_{nc}| = |F_a L \cos\alpha| = F_a L = P_\perp \mu L = P\cos\alpha\ \mu L = \mathbf{1{,}5\cdot 10^2\,J}$$

B. Applico il principio di conservazione dell'energia meccanica, sapendo che $L_{nc} = -1{,}5\cdot 10^2\,J$:

$$\begin{cases} U_o + K_o + L_{nc} = U + K \\ U_o = 0\,J \end{cases} \qquad \frac{1}{2}mv_o^2 + L_{nc} = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2\frac{L_{nc}}{m} - 2gh} = \sqrt{v_o^2 + 2\frac{L_{nc}g}{P} - 2gL\sin\alpha} = \mathbf{5{,}5\,m/s} \qquad sapendo\ che: \quad P = mg \Rightarrow m = \frac{P}{g} \quad h = L\sin\alpha$$

5. Un sasso di 2,0 kg è appeso a un filo lungo 4,0 m, di massa trascurabile, fissato al soffitto. Il sasso transita a 8,0 m/s nella posizione centrale.
   A. Qual è la sua velocità quando il filo forma un angolo di 60° con la verticale?
   B. Quale altezza massima raggiunge?

$$m = 2{,}0\,kg \qquad L = 4{,}0\,m \qquad v_{max} = 8{,}0\,m/s \qquad \alpha = 60° \qquad v_1? \qquad h_{max}?$$

A. La velocità del sasso quando transita nella posizione centrale è di fatto la velocità massima. Nella posizione centrale, è presente solo l'energia cinetica, mentre l'energia potenziale può essere considerata nulla. Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica e ricordando che: $h = L - L\cos\alpha = L\,(1-\cos\alpha)$:

$$U_o + K_o = U + K \quad\Rightarrow\quad mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad\Rightarrow\quad v_1 = \sqrt{v_{max}^2 - 2gL\,(1-\cos\alpha)} = \mathbf{5{,}0\,m/s}$$

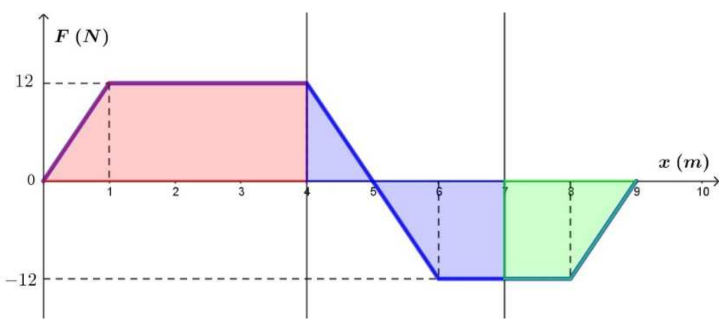
B. Nell'altezza massima, la velocità è nulla:

$$mgh_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad\Rightarrow\quad h_{max} = \frac{v_{max}^2}{2g} = \mathbf{3{,}3\,m}$$

6. Il grafico mostra l'andamento dell'accelerazione di un corpo di 2,00 kg, supposto uniforme, dovuto alla forza applicata nello spostamento lungo l'asse x da 0 m a 9,0 m. Quanto lavoro ha compiuto la forza quando il corpo raggiunge:

A. 4,0 m? B. 7,0 m? C. 9,0 m?

Per risolvere il problema, è sufficiente rappresentare l'andamento della forza rispetto allo spostamento, ricordando il secondo principio della dinamica, ovvero $F = ma$. L'andamento della forza è uguale a quello dell'accelerazione e, riportando la sua variazione in un grafico forza-spostamento, possiamo determinare il lavoro, calcolando l'area sottesa dal grafico e ricordando che l'area sotto l'asse x dà un lavoro negativo:



$$L(4{,}0\,m) = \frac{(3+4)\,m\cdot 12\,N}{2} = \mathbf{42\,J} \qquad L(7{,}0\,m) = \frac{(3+5)\,m\cdot 12\,N}{2} - \frac{(1+2)\,m\cdot 12\,N}{2} = \mathbf{30\,J}$$

$$L(9{,}0\,m) = \frac{(3+5)\,m\cdot 12\,N}{2} - \frac{(2+4)\,m\cdot 12\,N}{2} = \mathbf{12\,J}$$