1. Un'anatra galleggia sull'acqua di un lago ($d = 10^3\ kg/m^3$) con il 25% del suo volume immerso. Calcola la densità dell'anatra.

$$d = 10^3\ kg/m^3 \qquad V_i = \frac{1}{4}V \qquad d_a?$$

Siccome l'anatra galleggia, il suo peso è uguale alla spinta di Archimede. Ricordiamo che la spinta di Archimede è pari al peso dell'acqua spostata, perciò: $S_A = \frac{1}{4}Vdg$. Nel caso del peso dell'anatra, dato dal prodotto tra massa e accelerazione di gravità, al posto della massa uso la densità, ricordando che: $d_a = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = d_aV$.

$$P = S_A \quad \Rightarrow \quad d_aVg = \frac{1}{4}Vdg \quad \Rightarrow \quad d_a = \frac{1}{4}d = \mathbf{250\ kg/m^3}$$

2. In una patologia chiamata aterosclerosi, sulla parete interna delle arterie si deposita una placca di grasso che provoca il restringimento (o stenosi) della sezione attraverso la quale passa il sangue. La velocità del sangue nella carotide (un'arteria che passa nel collo) in un punto in cui si ha una stenosi è tre volte maggiore di quella in un punto in cui l'arteria è normale. Calcola il rapporto tra i raggi della carotide in questi due punti.

$$v_s = 3\,v \qquad \frac{r}{r_s}?$$

Trattandosi di un flusso in cui la portata si mantiene costante e trattandosi di un fluido incomprimibile, perciò con densità costante, posso applicare l'equazione di continuità:

$$A_sv_s = Av \quad \Rightarrow \quad \pi r_s^2 \cdot 3v = \pi r^2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{r_s} = \sqrt{3} = \mathbf{1,7}$$

3. In una conduttura a sezione costante, scorre olio di densità $925\ kg/m^3$. La conduttura supera un dislivello di $4,0\ m$ di altezza. Qual è la differenza di pressione dell'olio tra il punto più alto e quello più basso?

$$d = 925\ kg/m^3 \qquad h_B - h_A = 4,0\ m \qquad p_B - p_A?$$

Applico l'equazione di Bernoulli, ricordando che, trattandosi di una conduttura a sezione costante per l'equazione di continuità $v_A = v_B$:

$$p_A + dgh_A = p_B + dgh_B \quad \Rightarrow \quad p_B - p_A = dg(h_A - h_B) = -dg\,(h_B - h_A) = \mathbf{-3,6 \cdot 10^4\ Pa}$$

4. La piscina di uno stabilimento balneare è svuotata periodicamente per effettuare un ricambio di acqua. Il foro di scarico, di sezione $0,020\ m^2$, si trova sul fondo della piscina, a $4,0\ m$ di profondità, ed è collegato a un tubo che porta l'acqua in mare. A) Calcola la velocità iniziale di efflusso dal tubo. B) Calcola quanti litri d'acqua escono inizialmente al secondo.

$$S = 0,020\ m^2 \qquad h = 4,0\ m \qquad v? \qquad Q\ (L/s)?$$

A) Determino la velocità iniziale di efflusso applicando la legge di Torricelli: $v = \sqrt{2gh} = \mathbf{8,9\ m/s}$.

B) Per determinare la portata: $Q = Sv = \mathbf{180\ L/s}$.

5. Dell'acqua scorre con un flusso di $3,11\ kg/s$ in un tubo di gomma avente un diametro di $3,22\ cm$. A) Qual è la velocità dell'acqua nel tubo? B) Se il diametro del tubo fosse ridotto dell'80%, il flusso sarebbe maggiore, minore o uguale a $3,11\ kg/s$? Motiva la tua risposta.

$$Q = 3,11\ kg/s \qquad d_1 = 3,22\ cm \qquad d = 1000\ kg/m^3 \qquad v? \qquad d_2 = \frac{1}{5}d_1 \qquad Q_2 >< Q?$$

A) Dalla definizione di portata:

$$Q = vdS = \pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 dv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{4Q}{\pi d d_1^2} = \mathbf{3,82\ m/s}$$

B) Cambiando il diametro del tubo, cambia anche la velocità, secondo quanto stabilito dall'equazione di continuità: $v_1S_1 = v_2S_2$. Siccome la portata è il prodotto di velocità, area della sezione del tubo e densità, e visto che il prodotto di velocità e area della sezione del tubo è costante per l'equazione di continuità, **la portata non cambia**.

6. Dell'acqua scorre in un tubo orizzontale di diametro 2,8 cm che è collegato a un secondo tubo orizzontale di diametro 1,6 cm. La differenza di pressione fra i due tubi è di 7,5 kPa. Calcola la velocità di flusso nel tubo di diametro maggiore.

$$d_1 = 2{,}8 \cdot 10^{-2}\,m \qquad d_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\,m \qquad p_1 - p_2 = 7{,}5\,kPa \qquad d = 1000\,kg/m^3 \qquad v_1?$$

Per l'effetto Venturi, trattandosi di n condotto orizzontale a sezione variabile, la pressione è maggiore dove l'area della sezione del condotto è maggiore, perciò $p_1 - p_2 > 0$. Applicando l'equazione di Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}dv_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}d\,(v_2^2 - v_1^2) = p_1 - p_2$$

Nell'equazione, compaiono come incognite le due velocità, perciò è necessario usare l'equazione di continuità per trovare la relazione tra le velocità:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \frac{\pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{\pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

A questo punto, è possibile determinare la velocità richiesta:

$$\frac{1}{2}d\left(v_1^2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - v_1^2\right) = p_1 - p_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{d\left(\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right)}} = \mathbf{1,3\ m/s}$$

7. Una piccola sfera di alluminio di densità $2{,}7 \cdot 10^3\ kg/m^3$ viene fatta cadere in una vasca d'acqua, la cui densità è $1{,}0 \cdot 10^3\ kg/m^3$ e la viscosità $1{,}0 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$. La velocità limite registrata è 3,8 m/s. Calcola il raggio della sfera.

$$d_{Al} = 2{,}7 \cdot 10^3\,kg/m^3 \qquad d = 1{,}0 \cdot 10^3\,kg/m^3 \qquad \eta = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,Pa \cdot s \qquad v = 3{,}8\,m/s \qquad R?$$

Quando raggiunge la velocità limite, la sfera si muove con velocità costante perciò, per il primo principio della dinamica, la somma delle forze che agiscono su di essa è uguale a zero. Le forze che agiscono sono: la forza peso P, diretta verso il basso, la spinta di Archimede S_A, diretta verso l'alto, e la forza di attrito viscoso F_v, diretta anch'essa verso l'alto e il cui modulo è dato, per la legge di Stokes, da $F_v = 6\pi\eta R v$. Ricordando che la spinta di Archimede è pari al peso del fluido spostato e ricordando che la densità: $d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = dV$, si ottiene:

$$P - S_A - F_v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P = S_A + F_v \qquad \Rightarrow \qquad d_{Al}Vg = dVg + 6\pi\eta R v$$

Il volume della sfera è dato da: $\frac{4}{3}\pi R^3$, perciò:

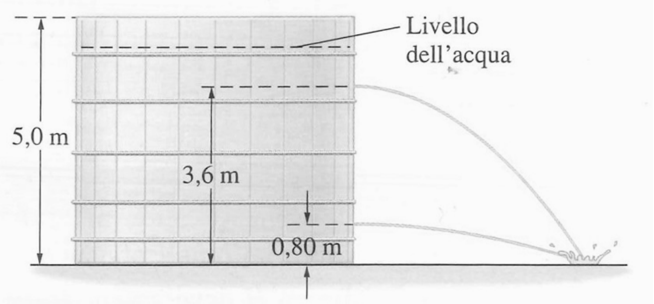
$$\frac{4}{3}\pi R^3 d_{Al} g = \frac{4}{3}\pi R^3 dg + 6\pi\eta R v \qquad \Rightarrow \qquad 2R^3 d_{Al} g - 2R^3 dg = 9\eta R v$$

Il raggio della sfera sarà sicuramente diverso da zero, perciò posso semplificare per R, ottenendo un'equazione di secondo grado in R:

$$R^2 g\,(d_{Al} - d) = \frac{9}{2}\eta v \qquad \Rightarrow \qquad R = 3\sqrt{\frac{\eta v}{2g(d_{Al} - d)}} = \mathbf{1,0 \cdot 10^{-3}\ m}$$

8. Il serbatoio d'acqua della figura è aperto nella parte superiore e ha due fori, uno a 0,80 m e uno a 3,6 m al di sopra del piano su cui è posto. Se i getti d'acqua che escono dai due fori colpiscono il piano nello stesso punto, qual è l'altezza dell'acqua nel serbatoio?

$$h_1 = 0{,}80\,m \qquad h_2 = 3{,}6\,m \qquad G_1 = G_2 \qquad H?$$



Applico la legge di Torricelli per determinare la velocità di efflusso dei due fori:

$$v_1 = \sqrt{2g(H - h_1)} \qquad v_2 = \sqrt{2g(H - h_2)}$$

Determino il tempo di caduta dell'acqua, considerando solo la componente verticale del moto, ovvero il moto uniformemente accelerato:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

E, analogamente: $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$.

Nella sua componente orizzontale, il moto (parabolico) di caduta dell'acqua è rettilineo uniforme, perciò lo spazio percorso in orizzontale (la gittata) è dato dal prodotto tra velocità e tempo di caduta. Perciò:

$$G_1 = G_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 t_1 = v_2 t_2 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{2g(H-h_1)} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{2g(H-h_2)} \cdot \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

Effettuando un po' di semplificazioni ed elevando al quadrato entrambi i membri, otteniamo:

$$h_1(H-h_1) = h_2(H-h_2) \qquad \Rightarrow \qquad h_1 H - h_1^2 = h_2 H - h_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad (h_1 - h_2)\, H = h_1^2 - h_2^2$$

$$\Rightarrow \qquad H = \frac{(h_1-h_2)(h_1+h_2)}{h_1-h_2} = h_1 + h_2 = \mathbf{4,4\ m}$$