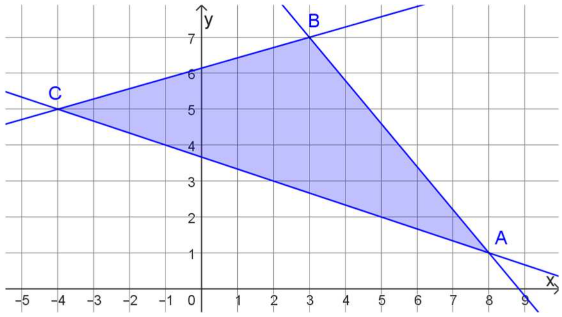
1. Scrivi un sistema di disequazioni le cui soluzioni sono gli insiemi di punti indicati nella figura a lato.

Dal grafico ricavo le coordinate dei punti $A(8,1)$, $B(3,7)$ e $C(-4,5)$.
Determino le equazioni delle rette passanti per i punti dati:




$$rta(A;B): \frac{x-x_B}{x_A-x_B}=\frac{y-y_B}{y_A-y_B} \qquad \frac{x-3}{8-3}=\frac{y-7}{1-7} \qquad 6x+5y-53=0$$

$$rta(B;C): \frac{x-3}{-4-3}=\frac{y-7}{5-7} \qquad 2x-7y+43=0$$

$$rta(A;C): \frac{x-8}{-4-8}=\frac{y-1}{5-1} \qquad x+3y-11=0$$

Sostituendo l'origine in ognuna delle equazioni, ottengo il sistema risolutivo:

$$\begin{cases} \mathbf{6x+5y-53\le 0} \\ \mathbf{2x-7y+43\ge 0} \\ \mathbf{x+3y-11\ge 0} \end{cases}$$

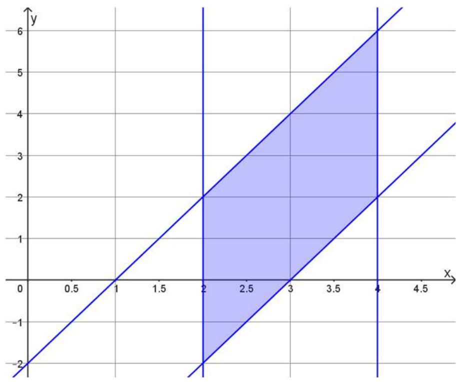
2. Rappresenta l'insieme delle soluzioni del seguente sistema: $\begin{cases} |y-2x+4|\le 2 \\ |x-3|\le 1 \end{cases}$

$$|y-2x+4|\le 2 \quad \Rightarrow \quad -2\le y-2x+4\le 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-2x\ge -6 \\ y-2x\le -2 \end{cases}$$

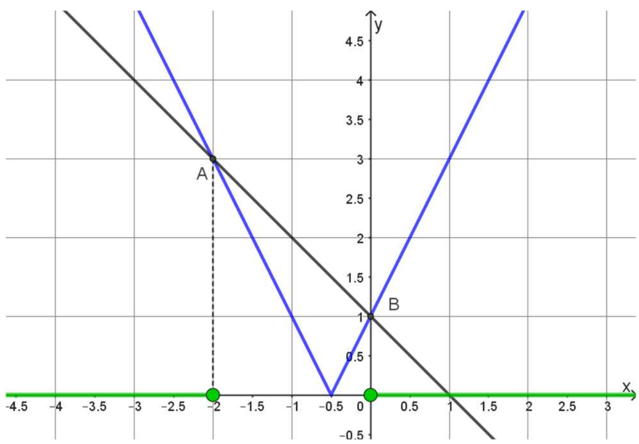
$$|x-3|\le 1 \quad \Rightarrow \quad -1\le x-3\le 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x\ge 2 \\ x\le 4 \end{cases}$$

Quindi il sistema diventa: $\begin{cases} y-2x\ge -6 \\ y-2x\le -2 \\ x\ge 2 \\ x\le 4 \end{cases}$




3. Interpreta graficamente la seguente disequazione e risolvila algebricamente: $|2x+1|\ge 1-x$

Rappresento la funzione: $y=|2x+1|$, rappresentando prima la retta $y=2x+1$ e riflettendo, rispetto all'asse x, i punti con le ordinate negative (nel grafico, la funzione rappresentata in blu).
Rappresento poi la retta $y=1-x$, passante per il punto dell'asse y di ordinata 1 e parallela alla bisettrice di secondo e quarto quadrante.
Determino le coordinate dei punti A e B, indicati sul grafico:




$$A: \begin{cases} y=-2x-1 \\ y=1-x \end{cases} \qquad -2x-1=1-x \qquad x=-2$$

$$B: \begin{cases} y=2x+1 \\ y=1-x \end{cases} \qquad 2x+1=1-x \qquad x=0$$

Dal grafico posso, a questo punto, dedurre la soluzione della disequazione:

$$\mathbf{x\le -2 \quad \vee \quad x\ge 0}$$

4. Del parallelogramma ABCD conosci le coordinate dei vertici $A\,(3;2)$ e $D(5;7)$, e l'equazione della retta del lato AB $x-3y+3=0$. Determina le coordinate dei vertici B e C, sapendo che il parallelogramma ha area 13 (ricorda che i vertici di un poligono si leggono in senso antiorario).

Determino la lunghezza del lato AD del parallelogramma:

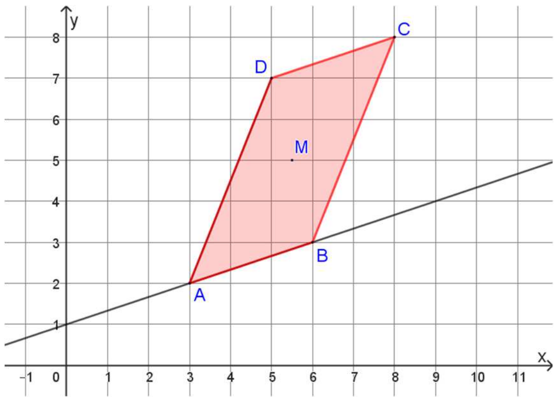
$$\overline{AD}=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{29}$$

L'altezza del parallelogramma, sapendo che la sua area è 13, sarà:

$$A=13=\overline{AD}\cdot h \qquad \Rightarrow \qquad h=\frac{13}{\sqrt{29}}$$

L'altezza del parallelogramma è, di fatto, la distanza del vertice B dal lato AD. Inoltre, del vertice B so che appartiene alla retta data, perciò le coordinate del vertice sono tali da soddisfare l'equazione della retta:

$$\begin{cases} d(B;AD)=h \\ x-3y+3=0 \end{cases} \qquad (*)$$




Devo determinare l'equazione della retta AD:

$$\frac{y-y_A}{y_D-y_A}=\frac{x-x_A}{x_D-x_A} \qquad \frac{y-2}{7-2}=\frac{x-3}{5-3} \qquad 5x-2y-11=0$$

Ora posso risolvere il sistema $(*)$:

$$\begin{cases} \dfrac{|5x-2y-11|}{\sqrt{29}}=\dfrac{13}{\sqrt{29}} \\ x-3y+3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} |5x-2y-11|=13 \\ x=3y-3 \end{cases} \qquad |15y-15-2y-11|=13 \qquad |13y-26|=13$$

$$|y-2|=1 \qquad y-2=\pm 1 \qquad \begin{matrix} y_1=3 \\ y_2=1 \end{matrix}$$

Sempre partendo dal fatto che il parallelogramma è ABCD non ADCB, il vertice B avrà coordinate: $\boldsymbol{B(6;3)}$, come si può facilmente desumere dal grafico. Per determinare il vertice C, considero innanzi tutto il fatto che in un parallelogramma le diagonali si tagliano scambievolmente a metà, perciò determino il punto medio M della diagonale BD e poi, conoscendo il punto medio della diagonale AC e il suo vertice A, posso determinare il vertice C del parallelogramma:

$$M\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right) \qquad \begin{cases} \dfrac{x_A+x_C}{2}=x_M \\ \dfrac{y_A+y_C}{2}=y_M \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{x_B+x_D}{2} \\ \dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{y_B+y_D}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_C=x_B+x_D-x_A=8 \\ y_C=y_B+y_D-y_A=8 \end{cases} \qquad \boldsymbol{C(8;8)}$$

5A. Del triangolo ABC conosci le coordinate del circocentro $D\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ e del vertice $A(-2;1)$. Sapendo che il lato BC giace sulla retta di equazione $x+y-8=0$, determina le coordinate dei due vertici B e C del triangolo.

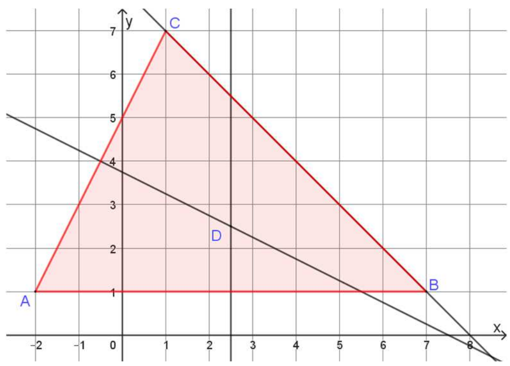
Il circocentro è il punto di incontro degli assi di un triangolo, perciò determino l'asse del segmento AC e impongo il suo passaggio per D, sostituendo le coordinate del circocentro:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=(x-x_C)^2+(y-y_C)^2$$

$$4x+4-2y+1=-2xx_C+x_C^2-2yy_C+y_C^2$$

$$4\cdot\frac{5}{2}+4-2\cdot\frac{5}{2}+1=-2\cdot\frac{5}{2}\cdot x_C+x_C^2-2\cdot\frac{5}{2}\cdot y_C+y_C^2$$

$$5(2+x_C)+5\,(-1+y_C)=-5+x_C^2+y_C^2$$




Per alleggerire il procedimento, indico le coordinate di C con $x_C=x$ e $y_C=y$ e ricordo inoltre che il punto C appartiene alla retta data dal testo, perciò le sue coordinate soddisfano l'equazione:

$$\begin{cases} x^2+y^2-5x-5y-10=0 \\ x+y-8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=8-y \\ 64-16y+y^2+y^2-40+5y-5y-10=0 \end{cases}$$

$$2y^2-16y+14=0 \qquad y^2-8y+7=0 \qquad \begin{matrix} y_1=1 \\ y_2=7 \end{matrix}$$

Quindi abbiamo i due vertici del triangolo: $\boldsymbol{B(7;1)}$ e $\boldsymbol{C(1;7)}$.

5B. Del triangolo isoscele ABC, di base BC, sono noti il vertice $A(7;8)$ e il baricentro $G(5;4)$. Dopo aver determinato i vertici B e C, rispettivamente sull'asse y e sull'asse x, calcola perimetro e area del triangolo.

Dato che i vertici B e C appartengono, rispettivamente, all'asse y e all'asse x, hanno generiche coordinate: $B(0;y)$ e $C(x;0)$.

Uso, quindi, le generiche coordinate del baricentro: $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$, posso determinare le coordinate dei due vertici:

$$\frac{7+0+x}{3}=5 \qquad x=15-7=8 \qquad \boldsymbol{C(8;0)}$$

$$\frac{8+y+0}{3}=4 \qquad y=12-8=4 \qquad \boldsymbol{B(0;4)}$$

Determino le misure dei singoli lati e, quindi, il perimetro:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65} \qquad \overline{BC}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$$

$$2p=2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}=2\sqrt{65}+4\sqrt{5}=\boldsymbol{2\sqrt{5}\left(\sqrt{13}+2\right)}$$

Per determinare l'area, dato che, trattandosi di un triangolo isoscele, la mediana relativa alla base coincide con l'altezza:

$$A=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AM}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\sqrt{3^2+6^2}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}=\boldsymbol{30}$$