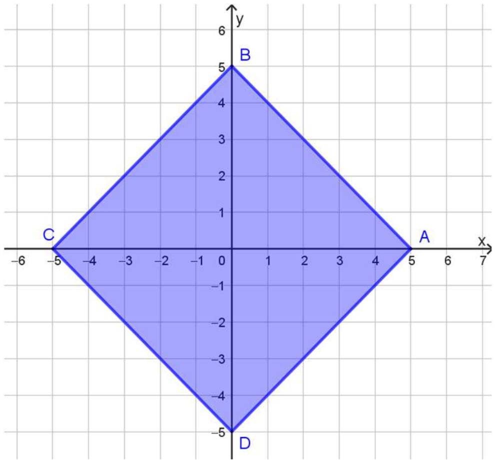
1. Scrivi un sistema di disequazioni le cui soluzioni sono gli insiemi di punti indicati nella figura a lato.

Dal grafico ricavo le coordinate dei punti $A(5,0)$, $B(0,5)$, $C(-5,0)$ e $D(0,-5)$.
I lati del quadrato sono paralleli alle bisettrici dei quadranti, perciò:

$$rta(A;B): y = -x + 5 \qquad rta\ (B;C): y = x + 5$$

$$rta(C;D): y = -x - 5 \qquad rta\ (D;A): y = x - 5$$



La regione indicata può essere rappresentata in più modi, usando un sistema di quattro disequazioni, o di due o, addirittura, con un'unica disequazione:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + y \geq -5 \\ x - y \leq 5 \\ x - y \geq -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} |x + y| \leq 5 \\ |x - y| \leq 5 \end{cases}$$

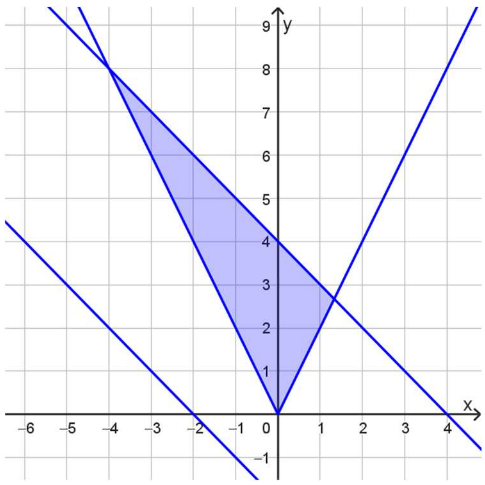
$$\boldsymbol{|x| + |y| \leq 5}$$

2. Rappresenta l'insieme delle soluzioni del seguente sistema: $\begin{cases} |y + x - 1| \leq 3 \\ y \geq 2|x| \end{cases}$

$$|y + x - 1| \leq 3 \quad \Rightarrow \quad -3 \leq y + x - 1 \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y \geq -x - 2 \\ y \leq -x + 4 \end{cases}$$

I punti rappresentati sono quelli della striscia compresa tra le due rette.

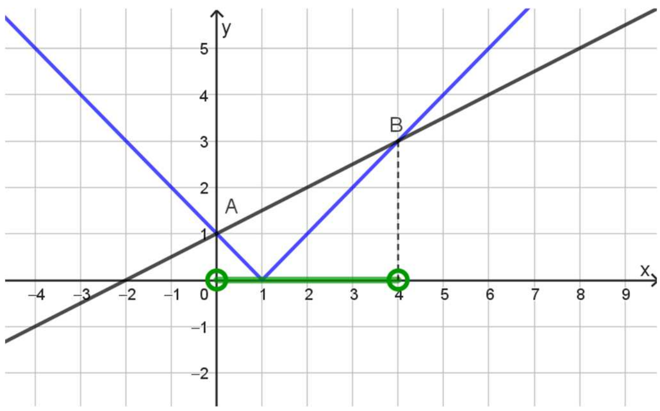
$$y = 2|x| \quad \Rightarrow \quad y = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$



I punti rappresentati sono quelli nel semipiano positivo delle y, sopra la linea spezzata. L'intersezione dei due insiemi di punti dà il triangolo rappresentato a lato, con l'esclusione delle semirette (rappresentate solo per completezza), mentre sono inclusi i lati del triangolo.

3. Interpreta graficamente la seguente disequazione e risolvila algebricamente: $|1 - x| < \frac{1}{2}x + 1$

Rappresento la funzione: $y = |1 - x|$, rappresentando più velocemente $y = |x - 1|$, quindi disegno prima la retta $y = x - 1$ e poi rifletto, rispetto all'asse x, i punti con le ordinate negative (nel grafico, la funzione rappresentata in blu).
Rappresento poi la retta $y = \frac{1}{2}x + 1$, passante per il punto dell'asse y di ordinata 1 e di coefficiente angolare $\frac{1}{2}$ (nel grafico, in nero).
Determino le coordinate dei punti A e B, indicati sul grafico:



$$A: \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x + 1 = 1 - x \qquad x = 0$$

$$B: \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x + 1 = x - 1 \qquad x = 4$$

Dal grafico posso, a questo punto, dedurre la soluzione della disequazione:

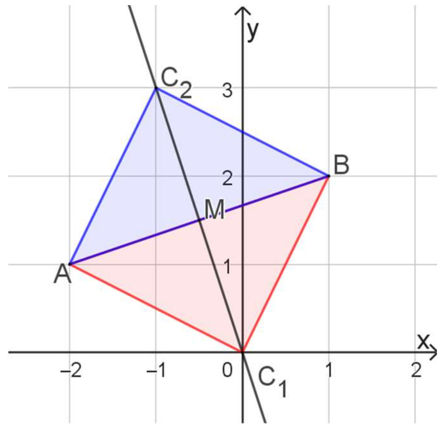
$$\boldsymbol{0 < x < 4}$$

4. Determina le coordinate di un punto C che forma con $A(-2;1)$ e $B(1;2)$ un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, di area $\frac{5}{2}$.

Trattandosi di un triangolo isoscele di base AB, il vertice C si trova sull'asse del segmento dato:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-2)^2 \qquad y=-3x$$

Per determinare l'area del triangolo posso fare il semiprodotto della base AB con l'altezza CM, dove M è il punto medio della base, dato che in un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base è anche mediana. Determino, quindi, la lunghezza di AB, calcolo l'altezza e pongo la distanza di C da M uguale all'altezza:



$$\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10} \qquad M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CM} \quad\Rightarrow\quad \overline{CM}=\frac{2\,\mathcal{A}}{\overline{AB}}=\frac{2\cdot\frac{5}{2}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\overline{CM}=\frac{\sqrt{10}}{2} \quad\Rightarrow\quad \overline{CM}^2=\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

Metto a sistema le due condizioni per C:

$$\begin{cases} y=-3x \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases} y=-3x \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-3x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases} y=-3x \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+9\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$10\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \qquad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \qquad x+\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}$$

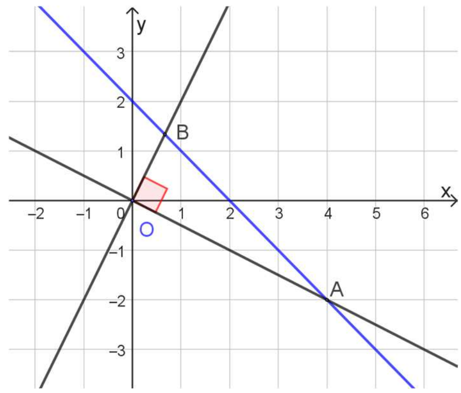
Dalla soluzione dell'equazione determiniamo i due punti che soddisfano le condizioni richieste:

$$\boldsymbol{C_1(0;0)\equiv O} \qquad \boldsymbol{C_2(-1;3)}$$

5A. Determina le equazioni delle coppie di rette perpendicolari, passanti per l'origine che formano con la retta di equazione $y=-x+2$ un triangolo di area uguale a $\frac{10}{3}$.

Le due rette perpendicolari hanno equazione generica: t_1: $y=mx$ e t_2: $y=-\frac{1}{m}x$, perché due rette passanti per l'origine hanno ordinata all'origine nulla, e due rette perpendicolari hanno coefficienti angolari che sono uno l'antireciproco dell'altro.

Per calcolare l'area del triangolo indicato, ricordo che è un triangolo rettangolo, perciò l'area è data dal semiprodotto dei cateti, i cui estremi sono dati da O e dall'intersezione della retta data rispettivamente con t_1 e con t_2:



$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{10}{3}$$

Determino le coordinate dei punti A e B e pongo l'area uguale a $\frac{10}{3}$:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{m}x \\ y=-x+2\end{cases} \qquad \begin{cases} y=-\frac{1}{m}x \\ -\frac{1}{m}x=-x+2\end{cases} \qquad \begin{cases} y=-\frac{1}{m}x \\ (m-1)\,x=2m\end{cases} \qquad A\left(\frac{2m}{m-1};\frac{-2}{m-1}\right)$$

$$\begin{cases} y=mx \\ y=-x+2\end{cases} \qquad \begin{cases} y=mx \\ mx=-x+2\end{cases} \qquad \begin{cases} y=mx \\ (m+1)\,x=2\end{cases} \qquad B\left(\frac{2}{m+1};\frac{2m}{m+1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2m}{m-1}\right)^2+\left(\frac{2}{m-1}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{m+1}\right)^2+\left(\frac{2m}{m+1}\right)^2}=\frac{10}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{m^2+1}{(m-1)^2}}\cdot 2\sqrt{\frac{1+m^2}{(m+1)^2}}=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{m^2+1}{|m-1||m+1|}=\frac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{m^2+1}{m^2-1}=\pm\frac{5}{3} \qquad \begin{matrix} 3m^2+3=5m^2-5 \quad\Rightarrow\quad m^2=4 \quad\Rightarrow\quad m=\pm 2 \\ 3m^2+3=-5m^2+5 \quad\Rightarrow\quad 8m^2=2 \quad\Rightarrow\quad m=\pm\frac{1}{2}\end{matrix}$$

Ci sono due coppie di rette: $\boldsymbol{y=2x \quad y=-\frac{1}{2}x}$ e $\boldsymbol{y=-2x \quad y=\frac{1}{2}x}$.

5B. Determina le rette parallele alla retta di equazione $y = -2x$, ciascuna delle quali interseca gli assi cartesiani in due punti distanti $2\sqrt{5}$. Tra le due rette trovate, considera quella che interseca l'asse x in un punto di ascissa positiva, che chiamiamo A, e l'asse y in un punto di ordinata positiva, che chiamiamo B. Determina il punto P, appartenente al segmento AB, tale che $\overline{BP} = 3\,\overline{AP}$.

Le rette parallele alla retta data hanno equazione: $y = -2x + q$; ne determino l'intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} y = -2x + q \\ y = 0 \end{cases} \qquad A\left(\frac{q}{2}; 0\right) \qquad \begin{cases} y = -2x + q \\ x = 0 \end{cases} \qquad B(0; q)$$

Pongo la distanza tra i due punti uguale a $2\sqrt{5}$, ovvero: $\overline{AB}^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$

$$\left(\frac{q}{2} - 0\right)^2 + (0 - q)^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{q^2}{4} + q^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad q = \pm 4$$

Le due rette hanno equazione, rispettivamente: $y = -2x - 4$ e $y = -2x + 4$.

Tra le due rette scelgo $y = -2x + 4$, che ha intersezioni con gli assi $A(2; 0)$ e $B(0; 4)$.

Per determinare il punto P tale che $\overline{BP} = 3\,\overline{AP}$, determino il punto medio M del segmento AB e poi il punto medio P del segmento MA (dato che $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right) = \frac{1}{4}\overline{AB}$ e $\overline{BP} = \overline{AB} - \overline{AP} = \overline{AB} - \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, perciò: $\overline{BP} = 3\,\overline{AP}$):

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (1; 2) \qquad \boldsymbol{P\left(\frac{3}{2}; 1\right)}$$