1. Nel suo giretto quotidiano, un gatto compie uno spostamento di 120 m verso nord, seguito da un altro di 72,0 m verso ovest. Determina il modulo e la direzione dello spostamento che il gatto deve compiere per ritornare a casa.

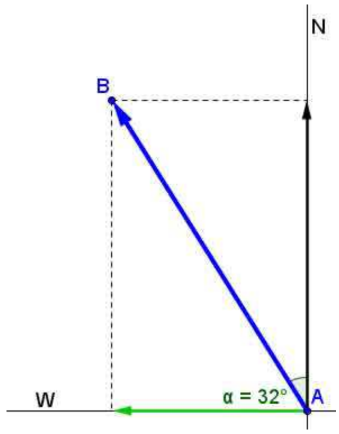
Lo spostamento che il gatto deve eseguire per tornare a casa è indicato con il vettore blu nella figura a lato. Determino quindi la lunghezza del vettore $\vec{s}$ usando il teorema di Pitagora e poi determino l'ampiezza dell'angolo α, che mi dà la direzione dello spostamento:

$$s = \sqrt{(120\ m)^2 + (72{,}0\ m)^2} = \mathbf{140\ m}$$

$$\overline{BC} = \overline{BA}\, tg\, \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = tg^{-1}\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \mathbf{31°}$$

In altre parole, **il gatto si sposta per 140 m, in direzione 31° sud rispetto a est**.

2. Una barca a vela scivola spinta dal vento con una velocità costante di modulo 4,2 m/s in direzione 32° nord rispetto a ovest. Dopo un viaggio di 25 minuti quale distanza ha percorso la barca verso ovest? Verso nord?



Avendo l'angolo che il vettore forma con la direzione Nord, posso determinare le componenti rispetto a nord (in nero nel disegno) e rispetto a ovest (in verde). Per determinare lo spostamento, trattandosi di moto rettilineo uniforme, devo moltiplicare la velocità per il tempo:

$$s_N = s \cdot \cos 32° = vt \cdot \cos 32° = \mathbf{5{,}3\ km}$$

$$s_O = s \cdot \mathrm{sen}\, 32° = vt \cdot \mathrm{sen}\, 32° = \mathbf{3{,}3\ km}$$

3. Un tappo viene sparato da una bottiglia di champagne con un angolo di 35,0° sopra l'orizzontale. Se il tappo cade a una distanza orizzontale di 1,30 m dopo 1,25 s, qual è il modulo della sua velocità iniziale?

So che il tappo si muove di moto rettilineo uniforme in direzione orizzontale, perciò posso determinarne la velocità semplicemente considerando l'equazione del moto nella direzione dell'asse x:

$$x = v_{ox}t = v_o t\ \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v_o = \frac{x}{t\cos\alpha} = \mathbf{1{,}27\ m/s}$$

4. Una palla viene lanciata con un angolo di 45,0° sopra l'orizzontale e percorre una distanza orizzontale di 90 m prima di essere ricevuta allo stesso livello dal quale è stata lanciata.
   a. Qual è il modulo della velocità iniziale della palla?
   b. Per quanto tempo la palla resta in aria?
   c. Qual è l'altezza massima raggiunta dalla palla durante il volo?

   Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} x = v_{ox}t \\ y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

   a. Determino il tempo di volo della palla, risolvendo la seconda equazione con $y = 0$:

$$v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_v = \frac{2\,v_{oy}}{g} = \frac{2\,v_o\,sen\,\alpha}{g}$$

   L'altro risultato, $t = 0s$, è quello della partenza, quando la palla si trova allo stesso livello a cui arriverà dopo il lancio.
   Ora posso determinare la velocità iniziale, sostituendo il tempo di volo nella prima equazione e ottenendo così la gittata, che conosco. Da questa, posso trovare la velocità iniziale in modulo:

$$x = v_{ox}t = v_o\cos\alpha\frac{2\,v_o\,sen\,\alpha}{g} = v_o^2\frac{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{g} \qquad \Rightarrow \qquad v_o = \sqrt{\frac{gG}{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}} = \mathbf{30\ m/s}$$

   Dove G è la gittata di 90 m.

   b. È richiesto il tempo di volo, che ora posso determinare:

$$t_v = \frac{2\,v_o\,sen\,\alpha}{g} = \mathbf{4,3\ s}$$

   c. Durante il volo, la palla raggiunge l'altezza massima a metà del suo percorso, perciò sostituendo un tempo di volo che è la metà di quello trovato al punto precedente e sostituendolo nella seconda equazione, quella dello spostamento verticale, ottengo l'altezza massima raggiunta:

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_{oy}^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_{oy}^2}{g^2} = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \mathbf{23\ m}$$

5. Un alpinista nella traversata di un costone di giaccio si trova di fronte un crepaccio. Il lato opposto del crepaccio è 2,75 m più in basso e dista orizzontalmente 4,10 m. Per attraversare il crepaccio, l'alpinista prende la rincorsa e salta in direzione orizzontale. Qual è la minima velocità iniziale necessaria per attraversare con sicurezza il crepaccio?

   Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} x = v_o t \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

   Determino il tempo di volo dell'alpinista, risolvendo la seconda equazione con $y = 0$:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

   Lo sostituisco nella prima equazione, in modo che l'unica incognita sia v_o, visto che conosco la distanza percorsa in orizzontale:

$$x = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \Rightarrow \qquad v_o = x\sqrt{\frac{g}{2h}} = \mathbf{5,48\ m/s}$$

6. Il bordo esterno di un frisbee in rotazione, di diametro 29 cm, ha una velocità tangenziale di 3,7 m/s. Qual è la velocità angolare del frisbee? Determinane il periodo, la frequenza e l'accelerazione centripeta.

Dalla velocità tangenziale posso ricavare la velocità angolare, usando la relazione che le lega:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2v}{d} = \mathbf{26\,rad/s}$$

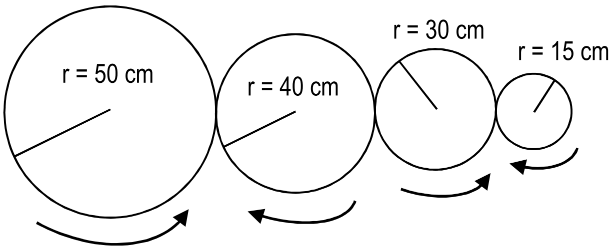
Sempre dalla velocità, posso ricavare il periodo e quindi poi la frequenza come reciproco del periodo:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{\pi d}{v} = \mathbf{0,25\,s} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = \mathbf{4,1\,Hz}$$

Ora, non resta che calcolare l'accelerazione centripeta, usando la sua definizione:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \mathbf{94\,m/s^2}$$

7. Quattro dischi ruotano insieme senza strisciare. Il disco di raggio 50 cm ha velocità angolare di 18 rad/s. Qual è la velocità angolare degli altri tre dischi?



I dischi hanno la stessa velocità tangenziale, che posso ricavare dalla velocità angolare del primo disco:

$$v = \omega r = 18\,rad/s \cdot 0{,}50\,m = 9{,}0\,m/s$$

Posso ricavare quindi le altre velocità angolari, semplicemente dividendo la velocità tangenziale per il raggio:

$$\omega_2 = -\frac{v}{r_2} = -\frac{9{,}0\,m/s}{0{,}40\,m} = \mathbf{-23\,rad/s} \qquad \omega_3 = \frac{v}{r_3} = \frac{9{,}0\,m/s}{0{,}30\,m} = \mathbf{30\,rad/s}$$

$$\omega_4 = -\frac{v}{r_4} = -\frac{9{,}0\,m/s}{0{,}15\,m} = \mathbf{-60\,rad/s}$$

8. Un corpo si muove di moto circolare uniforme e completa un giro in 4,70 s. La sua proiezione su un diametro della traiettoria si muove con moto armonico. Scrivine la relazione accelerazione spostamento.

L'equazione del moto armonico è: $a = -\omega^2 x$. Posso ricavare il valore della pulsazione ω dalla sua definizione:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = -(1,79\,s^{-2})\,x}$$

9. Un proiettile viene lanciato con una velocità iniziale di modulo v_o. Nel punto di massima altezza la sua velocità è $\frac{1}{2}v_o$. Qual è stato l'angolo di lancio del proiettile?

Nel punto più alto della sua traiettoria, il proiettile ha solo la componente orizzontale della velocità, visto che la velocità verticale è nulla, perciò:

$$v_{ox} = v_o \cos\alpha = \frac{1}{2}v_o \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \mathbf{60°}$$