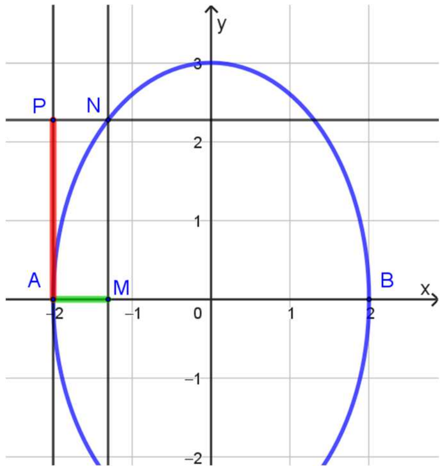
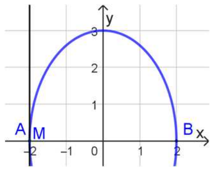
1. Scrivi il sistema parametrico risolvente del seguente problema, dopo aver rappresentato la situazione e studiato i casi limite.
   Sia data l'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 = 36$, di vertici A e B, rispettivamente, di ascissa negativa e positiva. Individua un punto M sull'asse minore, in modo che:
   - tracciata per M la perpendicolare all'asse minore questa incontri in N l'arco di ellisse nel semipiano positivo delle y
   - data P, proiezione di N sulla tangente in A all'ellisse

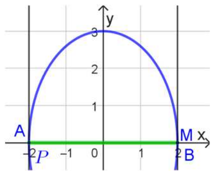
   $\overline{AM} + \overline{AP} = k$, con $k \in \mathbb{R}_O^+$.



In forma canonica, l'ellisse ha equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, quindi ha vertici $A(-2;0)$ e $B(2;0)$. Il punto M ha coordinate $M(x;0)$ con $-2 < x < 2$. Valutiamo i casi limite:



Nel caso in cui $M \equiv A$, cioè $x = -2$, $\overline{AM} = 0$ e $\overline{AP} = 0$, perciò $k = 0$, che contraddistingue una situazione accettabile.



Nel caso in cui $M \equiv B$, cioè $x = 2$, $\overline{AM} = 4$ e $\overline{AP} = 0$, perciò $k = 4$, che contraddistingue una situazione accettabile.

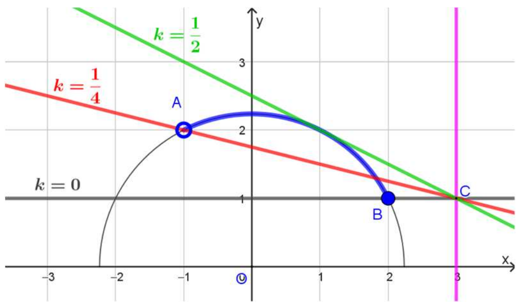
I punti coinvolti hanno coordinate: $M(x;0)$, per determinare l'ordinata di N, esplicito l'equazione dell'ellisse:

$$y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \qquad y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2} \qquad N\left(x; \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}\right)$$

La tangente in A all'ellisse è una retta parallela all'asse di equazione $x = -2$, perciò P ha coordinate: $P\left(-2; \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}\right)$ e $\overline{AP} = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$.
La condizione data permette di scrivere il sistema parametrico, con $\overline{AM} = x + 2$, con $x + 2 \geq 0$ garantito dalle condizioni:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2 + \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2} = k} \\ \boldsymbol{-2 \leq x \leq 2} \end{cases}$$

2. Determina le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro k, con il metodo grafico: $\begin{cases} kx + \sqrt{5 - x^2} = 1 + 3k \\ -1 < x \leq 2 \end{cases}$



Il sistema può essere riscritto mettendo in evidenza la conica, che è una semicirconferenza:

$$\begin{cases} y = \sqrt{5 - x^2} \\ kx + y = 1 + 3k \\ -1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5; y \geq 0 \\ y - 1 + k(x - 3) = 0 \\ -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

La semicirconferenza ha centro nell'origine e raggio $\sqrt{5}$, mentre il fascio di rette è proprio con centro in $C(3;1)$. Gli estremi dell'arco di circonferenza da considerare sono $A(-1;2)$ e $B(2;1)$.

Impongo il passaggio del fascio per i due punti dati:

$$Passaggio\ per\ A(-1;2):\ 2 - 1 + k(-1 - 3) = 0 \quad k = \frac{1}{4} \qquad Passaggio\ per\ B(2;1):\ 1 - 1 + k(2 - 3) = 0 \quad k = 0$$

Determino il valore del parametro in corrispondenza della tangente, ponendo la distanza del centro dalla retta generica del fascio uguale al raggio:

$$\frac{|0 - 1 - 3k|}{\sqrt{1 + k^2}} = \sqrt{5} \qquad |3k + 1|^2 = \left(\sqrt{5 + 5k^2}\right)^2 \qquad 9k^2 + 6k + 1 = 5 + 5k^2 \qquad 2k^2 + 3k - 2 = 0$$

Le due soluzioni dell'equazione sono $k = -2$, non accettabile, considerato il verso di percorrenza del fascio, e $k = \frac{1}{2}$. La soluzione del sistema, osservando il grafico è:

$$\boldsymbol{1\ soluzione\ per\ 0 \leq k \leq \frac{1}{4}} \qquad \boldsymbol{2\ soluzioni\ per\ \frac{1}{4} < k \leq \frac{1}{2}}$$

3. Scrivi un sistema di disequazioni che individui la regione di piano rappresentata a lato e calcola l'area indicata.

Determino innanzi tutto l'equazione dell'ellisse, di semiassi 4 e 2, con i fuochi su una retta parallela all'asse x e di centro $O'(7;3)$:

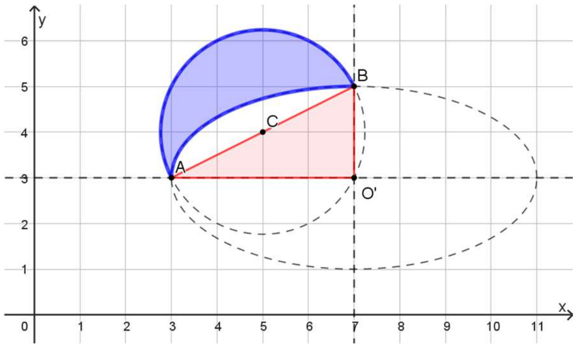
$$\frac{(x-7)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

Siccome considero i punti all'esterno dell'ellisse:

$$(x-7)^2+4(y-3)^2\geq 16$$

La seconda conica è una circonferenza con centro nel punto $C(5;4)$ e raggio dato dal segmento $\overline{CB}=\sqrt{5}$:

$$(x-5)^2+(y-4)^2=5$$



Prendendo i punti interni della circonferenza, il sistema diventa:

$$\begin{cases}\boldsymbol{(x-7)^2+4(y-3)^2\geq 16}\\ \boldsymbol{(x-5)^2+(y-4)^2\leq 5}\end{cases}$$

Per calcolare l'area indicata in figura, sottraggo alla semicirconferenza la lunetta non colorata. L'area della lunetta è data dalla differenza tra il quarto di ellisse e l'area del triangolo rettangolo O'BA:

$$\frac{1}{2}\pi r^2-\left(\frac{1}{4}\pi ab-\frac{1}{2}ab\right)=\frac{5}{2}\pi-2\pi+4=\boldsymbol{4+\frac{\pi}{2}}$$

4. Dopo aver determinato il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali sia uguale a 1 la differenza tra i quadrati delle distanze dai due punti $A(-1;\,-1)$ e $B(3;0)$, cioè tali che:

$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=1$$

verifica che si tratta di una retta, perpendicolare al segmento AB, che dista $\frac{1}{2\,\overline{AB}}$ dal punto medio di AB.

Scelto il punto $P(x;y)$, sostituisco le coordinate date nella relazione $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=1$:

$$(x+1)^2+(y+1)^2-((x-3)^2+(y-0)^2)=1 \quad\Rightarrow\quad x^2+2x+1+y^2+2y+1-x^2+6x-9-y^2=1$$

$$8x+2y-8=0 \qquad y=-4x+4$$

Il luogo geometrico è la retta r. La retta passante per A e per B ha coefficiente angolare:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1}{4}$$

che, essendo antireciproco di -4, coefficiente angolare del luogo geometrico, risulta essere perpendicolare alla retta r.

Determino, ora, il punto medio del segmento AB, la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ e verifico che la distanza della retta dal punto medio è metà del reciproco della lunghezza del segmento:

$$M\left(1;\,-\frac{1}{2}\right) \qquad \overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+1^2}=\sqrt{17} \qquad d(M;r)=\frac{\left|4-\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{1}{2\sqrt{17}}=\frac{1}{2\,\overline{AB}}$$