1. Un carrello A di massa 300 g si muove in linea retta alla velocità di 4,50 m/s e urta un carrello B che si trova davanti a esso e si muove alla velocità di 2,10 m/s. Dopo l'urto elastico, A si muove alla velocità di 1,62 m/s. Qual è la velocità di B, dopo l'urto e qual è la massa di B?

$$m_1 = 300\ g \qquad v_2 = 2{,}10\ m/s \qquad v_1 = 4{,}50\ m/s \qquad V_1 = 1{,}62\ m/s \qquad m_2? \qquad V_2?$$

Trattandosi di un urto elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica. Posso quindi determinare le due incognita:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1\ (v_1 - V_1) = m_2\ (V_2 - v_2) \\ m_1\ (v_1^2 - V_1^2) = m_2 (V_2^2 - v_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ (v_1 - V_1) = m_2\ (V_2 - v_2) \\ m_1\ (v_1 - V_1)(v_1 + V_1) = m_2 (V_2 - v_2)(V_2 + v_2) \end{cases}$$

Mantenendo la prima equazione e sostituendo alla seconda il risultato del rapporto membro a membro tra la seconda e la prima equazione, otteniamo:

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 V_1 = m_2 V_2 - m_2 v_2 \\ v_1 + V_1 = V_2 + v_2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricavo la velocità finale e dalla prima la massa:

$$\begin{cases} V_2 = v_1 + V_1 - v_2 \\ m_2 = \dfrac{m_1\ (v_1 - V_1)}{V_2 - v_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_2 = \mathbf{4{,}02\ m/s} \\ m_2 = \mathbf{450\ g} \end{cases}$$

2. Una pattinatrice di 48 kg si muove a 3,0 m/s verso un pattinatore di 60 kg fermo. I due ripartono abbracciati e percorrono 5,0 m prima di fermarsi. Quanto vale il coefficiente di attrito tra i pattinatori e il ghiaccio?

$$m_1 = 48\ kg \qquad m_2 = 60\ kg \qquad v_1 = 3{,}0\ m/s \qquad v_2 = 0\ m/s \qquad \Delta s = 5{,}0\ m \qquad \mu?$$

Vale innanzi tutto la conservazione della quantità di moto, applicata nel caso di un urto totalmente anelastico:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\ V \qquad V = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ v_1$$

Questa è la velocità finale dell'urto, ma è la velocità iniziale, se consideriamo il moto uniformemente decelerato dovuto all'attrito. Possiamo quindi ricavare la decelerazione in funzione della velocità finale dell'urto e dello spostamento, ricordando che la velocità finale dello spostamento è nulla:

$$\Delta s = \frac{v_f^2 - V^2}{2a} \qquad a = -\frac{V^2}{2\ \Delta s}$$

Il segno negativo dell'accelerazione è dovuto al fatto che si tratta di una decelerazione. Nel seguito, consideriamo solo il suo modulo, visto che la forza d'attrito sarebbe negativa perché si oppone al moto.
La forza d'attrito è esattamente la forza frenante, perciò, applicando il secondo principio della dinamica:

$$ma = \mu m g \qquad \mu = \frac{a}{g} = \frac{V^2}{2\ g\Delta s} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2\ g\Delta s} = \mathbf{0{,}018}$$

3. Una palla di massa 24 g, che viaggia alla velocità v_1, urta elasticamente una palla ferma di massa pari alla metà. Dopo l'urto, la palla più piccola va a colpire elasticamente una terza palla ferma. Quale deve essere la massa della terza palla, affinché la sua velocità dopo l'urto sia uguale a v_1?

$$m_1 = 2m \qquad m_2 = m \qquad v_2 = 0 \qquad v_3 = 0 \qquad V_3 = v_1 \qquad m_3?$$

Considero innanzi tutto l'urto tra la prima e la seconda palla. Trattandosi di un urto elastico, si conserveranno sia la quantità di moto che l'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2')^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v_1 = 2V_1 + V_2' \\ 2v_1^2 = 2V_1^2 + (V_2')^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\,(v_1 - V_1) = V_2' \\ 2\,(v_1 - V_1)(v_1 + V_1) = (V_2')^2 \end{cases}$$

Mantenendo la prima equazione e sostituendo alla seconda il risultato del rapporto membro a membro tra la seconda e la prima equazione, otteniamo:

$$\begin{cases} 2v_1 - 2V_1 = V_2' \\ v_1 + V_1 = V_2' \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per 2 e sommando membro a membro, otteniamo il valore della velocità finale della seconda palla, mentre sottraendo la prima equazione dalla seconda (senza moltiplicare per 2), otteniamo il valore della velocità finale della prima palla:

$$\begin{cases} 4v_1 = 3V_2' \\ v_1 - 3V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} v_1 \\ \boldsymbol{V_2' = \frac{4}{3} v_1} \end{cases}$$

La velocità finale della seconda palla diventa la velocità iniziale nel secondo urto, quello tra seconda e terza palla. Anche in questo caso, trattandosi di un urto elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_2 V_2' + m_3 v_3 = m_2 V_2 + m_3 V_3 \\ \frac{1}{2} m_2 (V_2')^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 \cdot \frac{4}{3} v_1 = m_2 V_2 + m_3 v_1 \\ m_2 \cdot \frac{16}{9} v_1^2 = m_2 V_2^2 + m_3 v_1^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 \left(\frac{4}{3} v_1 - V_2\right) = m_3 v_1 \\ m_2 \left(\frac{4}{3} v_1 - V_2\right)\left(\frac{4}{3} v_1 + V_2\right) = m_3 v_1^2 \end{cases}$$

Mantenendo la prima equazione e sostituendo alla seconda il risultato del rapporto membro a membro tra la seconda e la prima equazione, otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} m_2 v_1 - m_2 V_2 = m_3 v_1 \\ \frac{4}{3} v_1 + V_2 = v_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{4}{3} m_2 v_1 + \frac{1}{3} m_2 v_1 = m_3 v_1 \\ V_2 = -\frac{1}{3} v_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_3 = \frac{5}{3} m_2 = \boldsymbol{20\ g} \\ V_2 = -\frac{1}{3} v_1 \end{cases}$$

4. In una partita a biliardo un giocatore colpisce elasticamente una palla A ferma con una palla identica B, lanciata a 2,1 m/s. Dopo l'urto la palla B si muove in una direzione deviata di 42° rispetto a quella iniziale.
Con quale angolo si muove la palla A dopo l'urto, rispetto alla direzione iniziale della palla B?
Determina le velocità delle due palle dopo l'urto.

$$m_A = m_B = m \qquad v_A = 0\,m/s \qquad v_B = 2{,}1\,m/s \qquad \alpha = 42° \qquad \beta? \qquad V_A? \qquad V_B?$$

Dalla conservazione della quantità di moto, ricaviamo:

$$m_B \overrightarrow{v_B} = m_A \overrightarrow{V_A} + m_B \overrightarrow{V_B}$$

Ovvero, visto che le masse sono uguali:

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_B}$$

In altre parole, la velocità iniziale è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti le due velocità finali, visto che, quando i due oggetti che si urtano hanno la stessa massa e uno dei due è fermo, le due velocità finali formano un angolo di 90°, perciò la biglia A dopo l'urto si muove formando un angolo di 48° con la direzione iniziale della palla B.
Possiamo quindi ricavare facilmente le due velocità finali, considerandole come componenti ortogonali della velocità iniziale:

$$V_A = v_B \cos 48° = \boldsymbol{1{,}4\ m/s} \qquad V_B = v_B \cos 42° = \boldsymbol{1{,}6\ m/s}$$

Soluzione alternativa:
Trattandosi di un urto elastico e sapendo che le masse delle due biglie sono uguali, le due velocità finali formeranno un angolo di 90°, perciò la velocità finale della seconda biglia forma un angolo $\beta = 48°$ con la traiettoria della velocità iniziale.
Considerando un piano cartesiano con l'asse x coincidente con la traiettoria della velocità iniziale della seconda biglia, scompongo la conservazione della quantità di moto nelle due direzioni cartesiane:

$$m_A\overrightarrow{v_A} + m_B\overrightarrow{v_B} = m_A\overrightarrow{V_A} + m_B\overrightarrow{V_B} \qquad \begin{cases} mv_B = mV_A\cos 48° + mV_B\cos 42° \\ 0 = mV_A\sin 48° - mV_B\sin 42° \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_B = V_A\cos 48° + V_B\cos 42° \\ V_B = V_A\dfrac{\sin 48°}{\sin 42°} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_B = V_A\cos 48° + V_A\sin 48° \cdot \dfrac{\cos 42°}{\sin 42°} \\ V_B = V_A\dfrac{\sin 48°}{\sin 42°} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A = \dfrac{v_B}{\cos 48° + \sin 48° \cdot \dfrac{\cos 42°}{\sin 42°}} = \mathbf{1,4\ m/s} \\ V_B = V_A\dfrac{\sin 48°}{\sin 42°} = \mathbf{1,6\ m/s} \end{cases}$$

5. Tre sfere di massa m, $2\,m$ e $4\,m$ sono poste, rispetto a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rispettivamente nei punti $A = (2\ cm; 5\ cm)$, $B = (7\ cm; 1\ cm)$, $C = (3\ cm; 7\ cm)$. Determina le coordinate del centro di massa del sistema.

$$m_A = m \qquad m_B = 2m \qquad m_C = 4m$$

$$x_A = 2\ cm \qquad y_A = 5\ cm \qquad x_B = 7\ cm \qquad y_B = 1\ cm \qquad x_C = 3\ cm \qquad y_C = 7\ cm \qquad x_{CM}? \qquad y_{CM}?$$

Risolvo le equazioni del centro di massa:

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{m\,x_A + 2m\,x_B + 4\,m\,x_C}{m + 2m + 4m} = \frac{x_A + 2x_B + 4x_C}{7} = \mathbf{4\ cm}$$

$$y_{CM} = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{m\,y_A + 2m\,y_B + 4\,m\,y_C}{m + 2m + 4m} = \frac{y_A + 2y_B + 4y_C}{7} = \mathbf{5\ cm}$$