1. Una circonferenza di equazione $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ viene traslata secondo un vettore $\vec{v}\ (a-1;2a)$. Determina a in modo che la circonferenza traslata abbia il centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante, scrivi l'equazione della circonferenza traslata.

Il centro della circonferenza data ha coordinate $C(-2;2)$ e il trasformato ha coordinate $C'(a-3;2a+2)$. Perché il nuovo centro sia sulla bisettrice di primo e terzo quadrante, l'ascissa e l'ordinata devono essere uguali:

$$a-3=2a+2 \qquad\qquad a=-5$$

La nuova circonferenza ha centro $C'(-8;\ -8)$ e raggio uguale a quello della circonferenza di partenza, ovvero 2. L'equazione della circonferenza traslata è quindi:

$$(x+8)^2+(y+8)^2=4 \qquad\qquad \boldsymbol{x^2+y^2+16\,x+16\,y+124=0}$$

2. Date le rette r e s, rispettivamente di equazioni $x-3y+1=0$ e $-2x+6y+3=0$, determina per quale valore del parametro k la retta s è immagine di r nella traslazione $t=t_1\circ t_2$, dove t_1 è la traslazione di vettore $\overrightarrow{v_1}\ (5;k)$ e t_2 la traslazione di vettore $\overrightarrow{v_2}\ (k;2)$.

La traslazione t che si ottiene dalla composizione delle due traslazioni ha vettore $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2=(5+k;2+k)$.
Trasliamo quindi la retta r con il vettore $-\vec{v}$:

$$x-5-k-3(y-2-k)+1=0 \qquad\qquad x-3y-5-k+6+3k+1=0$$

$$x-3y+2+2k=0$$

Riscriviamo l'equazione della retta s, dividendo tutti i coefficienti per -2:

$$s\colon x-3y-\frac{3}{2}=0$$

Perciò, per il principio di identità dei polinomi:

$$2+2k=-\frac{3}{2} \qquad\qquad \boldsymbol{k=-\frac{7}{4}}$$

3. La parabola di equazione $y=2x^2$ viene ruotata di 45° in senso orario intorno al suo vertice e successivamente traslata in modo che il vertice ottenuto sia $V_1\ (1;\ -1)$. Scrivi l'equazione della parabola ottenuta.

Scrivo le equazioni delle trasformazioni inverse, ovvero: per quanto riguarda la rotazione, considero una rotazione di 45° in senso antiorario e per la traslazione considero il vettore $-\vec{v}=(-1;1)$.

$$r^{-1}\left(O,\frac{\pi}{4}\right)\colon \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases} \qquad\qquad t^{-1}\colon \begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'+1 \end{cases}$$

Applico la rotazione all'equazione della parabola:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=x^2+y^2-2xy$$

Applico ora la traslazione:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}=x^2-2x+1+y^2+2y+1-2xy-2x+2y+2$$

$$\boldsymbol{2x^2-4xy+2y^2-x\left(8+\sqrt{2}\right)+y\left(8-\sqrt{2}\right)+8=0}$$

4. Qual è la relazione tra i coefficienti angolari di due rette che si corrispondono in una simmetria di asse parallelo a uno degli assi cartesiani? E in una simmetria che ha come asse una delle bisettrici dei quadranti? Argomenta la tua risposta.

Consideriamo le equazioni della simmetria rispetto alla retta $x = h$:

$$\begin{cases} x' = 2h - x \\ y' = y \end{cases}$$

Applichiamo la simmetria alla generica equazione della retta $y = mx + q$:

$$y = m\,(2h - x) + q \qquad\qquad y = -mx + 2mh + q$$

Consideriamo le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = h$:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2h - y \end{cases}$$

Applichiamo la simmetria alla generica equazione della retta $y = mx + q$:

$$2h - y = mx + q \qquad\qquad y = -mx + 2h - q$$

In entrambi i casi, **il coefficiente angolare della retta trasformata è opposto al coefficiente angolare di partenza**.

Se l'asse di simmetria è la bisettrice di primo e terzo quadrante, le equazioni della simmetria sono:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Applichiamo la simmetria alla generica equazione della retta $y = mx + q$:

$$x = my + q \qquad\qquad y = \frac{1}{m}x - \frac{q}{m}$$

Analogamente se l'asse di simmetria fosse stata la bisettrice di secondo e quarto quadrante:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

Applichiamo la simmetria alla generica equazione della retta $y = mx + q$:

$$-x = -my + q \qquad\qquad y = \frac{1}{m}x + \frac{q}{m}$$

In entrambi i casi, **il coefficiente angolare della retta trasformata è il reciproco del coefficiente angolare di partenza**.

5. Una simmetria assiale trasforma il triangolo di vertici $A(-3;3)$, $B(1;4)$, $C\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$ nel triangolo A'B'C'. Determina le coordinate di B', sapendo che A e C sono punti uniti.

Determino l'equazione della retta che passa per i punti A e C, che essendo punti uniti nella trasformazione si trovano sull'asse di simmetria:

$$\frac{x+3}{\frac{1}{2}+3} = \frac{y-3}{-\frac{1}{2}-3} \qquad\qquad y = -x$$

Trattandosi della bisettrice di secondo e quarto quadrante, la trasformazione ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

B viene quindi trasformato in $\boldsymbol{B'(-4;\ -1)}$.

6. Il rapporto fra la distanza di P da $F\ (2;0)$ e dalla retta di equazione $2x-5=0$ è uguale a $1/\sqrt{3}$. Determina l'equazione del luogo geometrico e determina le equazioni dei suoi assi di simmetria.

Considero il generico punto $P\ (x;y)$:

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\frac{|2x-5|}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Eleviamo a quadrato entrambi i membri:

$$12\,(x^2-4x+4+y^2)=4x^2-20\,x+25$$
$$8x^2+12\,y^2-28\,x+23=0$$

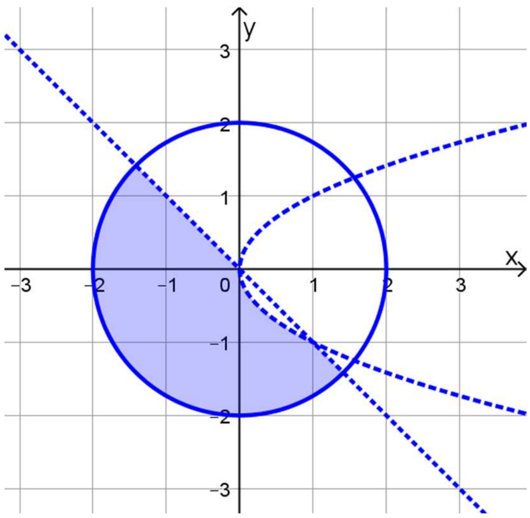
Trattandosi di un'ellisse traslata, possiamo trovare il suo centro di simmetria:

$$8\left(x^2-\frac{7}{2}x\right)+12\,y^2=-23 \qquad 8\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}\right)+12\,y^2=-23+\frac{49}{2}$$

$$8\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+12\,y^2=\frac{3}{2} \qquad \frac{\left(x-\frac{7}{4}\right)^2}{\frac{16}{3}}+\frac{y^2}{\frac{1}{8}}=1$$

I due assi di simmetria hanno equazione: $\boldsymbol{x=\frac{7}{4}}$ e $\boldsymbol{y=0}$.

7. Scrivi un sistema di disequazioni che individui la regione di piano rappresentata a lato:



La circonferenza ha centro nell'origine e raggio 2 e ne vengono presi i punti interni, perciò:

$$x^2+y^2\le 4$$

La parabola ha vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y. Ne vengono presi i punti esterni, perciò:

$$x<y^2$$

L'ultimo oggetto è la bisettrice di secondo e quarto quadrante:

$$x+y<0$$

Possiamo mettere le tre disequazioni a sistema:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x^2+y^2\le 4}\\ \boldsymbol{x<y^2}\\ \boldsymbol{x+y<0}\end{cases}$$

8. Determina le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro k, con il metodo grafico: $\begin{cases}x+k\sqrt{10x-x^2}-4k=0\\ 0\le x<8\end{cases}$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases}y=\sqrt{10\,x-x^2}\\ x+ky-4k=0\\ 0<x<8\end{cases}$$

Abbiamo cioè un arco di circonferenza e un fascio proprio di rette.

$$y=\sqrt{10x-x^2} \qquad \begin{cases}y\ge 0\\ x^2+y^2-10x=0\end{cases}$$

Si ottiene una circonferenza con centro sull'asse x, ovvero $C(5;0)$ e raggio 5 in quanto passante per l'origine.

Il fascio, invece, si può riscrivere: $x+k(y-4)=0$, ha come rette generatrici l'asse y e la retta parallela all'asse x, $y=4$. Il centro del fascio è quindi: $D(0;4)$. L'asse y lo otteniamo per $k=0$, mentre l'altra generatrice non la otteniamo per nessun valore di k.

Devo determinare la seconda retta tangente (la prima è la generatrice che si ottiene per $k=0$), ponendo la distanza della generica retta del fascio dal centro della circonferenza uguale al raggio:

$$\frac{|5-4k|}{\sqrt{1+k^2}}=5$$

Elevando entrambi i membri al quadrato e risolvendo l'equazione, otteniamo:

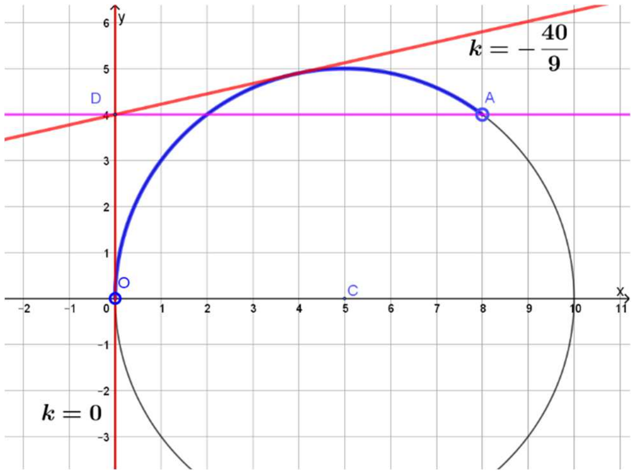
$$25-40k+16k^2=25+25k^2$$

$$9k^2+40k=0$$

$$k(9k+40)=0$$

Le due soluzioni dell'equazione sono $k=0$, che ci dà l'asse y, ovvero la generatrice e $k=-\frac{40}{9}$.

Rappresentando la situazione, notiamo che il verso di percorrenza del fascio è antiorario. Possiamo perciò concludere:



$$\mathbf{1\ soluzione\ per\ } k>0; \qquad \mathbf{2\ soluzioni\ per\ } k\le -\frac{40}{9}$$

9. Traccia il grafico delle seguenti funzioni applicando le trasformazioni geometriche a partire dal grafico delle funzioni note:

$$y=-e^{x+3}-2 \qquad y=\log(x-3)+4$$

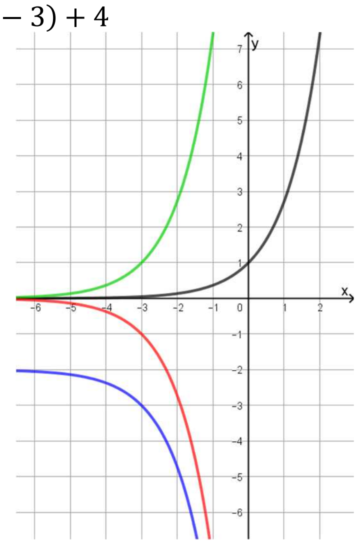
$$y=-e^{x+3}-2$$

Traccio la funzione di partenza: $y=e^x$ in nero.

Applico il vettore $\vec{v}_1(-3;0)$ e ottengo $y=e^{x+3}$, ovvero la funzione rappresentata in verde.

Applico la simmetria rispetto all'asse x e ottengo $y=-e^{x+3}$, ovvero la funzione in rosso.

Applico il vettore $\vec{v}_2(0;\ -2)$ e ottengo $y=-e^{x+3}-2$, ovvero la funzione in blu, quella finale.



$$y=\log(x-3)+4$$

Traccio la funzione di partenza: $y=\log x$ in rosso.

Applico il vettore $\vec{v}\,(3;4)$ e ottengo $y=\log(x-3)+4$, ovvero la funzione rappresentata in blu, quella finale.