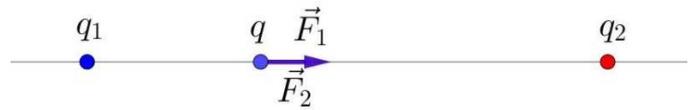


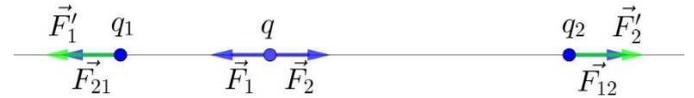
1. In un cilindro isolante, privo di attrito, si trovano allineate tre sferette cariche in equilibrio. La sferetta centrale, di carica 49 nC, dista 10 cm da quella di sinistra e 20 cm da quella di destra. Quanto valgono le cariche presenti sulle altre sfere?

Nel caso in cui le due cariche, a destra e a sinistra della carica di 49 nC, fossero discordi, la carica centrale non sarebbe in equilibrio, visto che, come si vede dalla rappresentazione a lato, la carica centrale verrebbe attirata dalla carica negativa e respinta da quella positiva.



Le due cariche devono essere per forza **concordi**.

Nel caso in cui le due cariche, a destra e a sinistra della carica di 49 nC, fossero concordi, ma entrambe positive, le cariche agli estremi verrebbero respinte dalla carica centrale e dalla carica all'altro estremo, perciò non sarebbero in equilibrio.



Le due cariche devono essere per forza **negative**.

Nel caso delle due cariche entrambe negative, per determinarne il valore non resta altro da fare che porre uguali tra loro i moduli delle forze in gioco, ovvero:



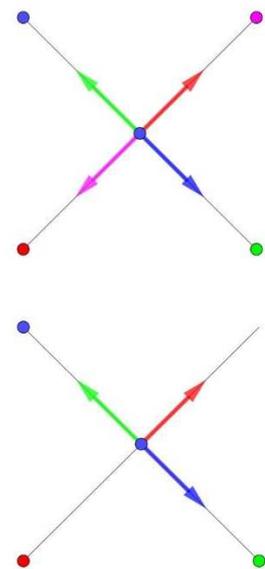
$$F_{21} = F'_1 \quad F_1 = F_2 \quad F'_2 = F_{12}$$

Scegliamo la prima e la terza relazione per ottenere più in fretta il risultato:

$$\begin{cases} F_{21} = F'_1 \\ F'_2 = F_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} k_o \frac{|q_1||q_2|}{(3d)^2} = k_o \frac{|q_1||q|}{d^2} \\ k_o \frac{|q||q_2|}{(2d)^2} = k_o \frac{|q_1||q_2|}{(3d)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{|q_2|}{9} = |q| \\ \frac{|q|}{4} = \frac{|q_1|}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} |q_2| = 9|q| \\ |q_1| = \frac{9}{4}|q| \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 = -1,1 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ q_2 = -4,4 \cdot 10^{-7} \text{ C} \end{cases}$$

2. Siano dati cinque protoni: quattro sono collocati nei vertici di un quadrato di lato 5,0 cm e il quinto nel punto d'incontro delle sue diagonali. Con quale accelerazione si mette in moto il protone collocato al centro del quadrato, se improvvisamente viene rimosso uno dei quattro protoni situati nei vertici? Determinane modulo, direzione e verso.

Le cariche in gioco sono tutte positive e le forze di Coulomb agenti sono tutte repulsive. Ho indicato con colori diversi le cariche poste nei vertici del quadrato e con colori uguali le corrispondenti forze agenti sulla carica posta nel centro del quadrato.



Nel momento in cui una qualsiasi delle cariche presenti nei vertici viene tolta, una delle forze agenti sulla carica posta nel centro del quadrato viene a mancare e, come vediamo, vince la forza repulsiva dovuta alla carica posta nel vertice opposto a quello rimasto senza carica (qualsiasi essa sia). La carica posta nel centro, quindi, è sottoposta a una forza di Coulomb che ha per **direzione la diagonale del quadrato** e **per verso quello in direzione della carica mancante** (qualsiasi essa sia), e la sua accelerazione avrà la stessa direzione e lo stesso verso della forza. Determiniamone il modulo, applicando la seconda legge della dinamica e ricordando che la distanza tra la carica nel centro del quadrato e la carica nel vertice è data dalla metà della diagonale, ovvero: $d = l \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{cases} F = k_o \frac{|q||q|}{d^2} \\ F = ma \end{cases} \quad ma = k_o \frac{q^2}{d^2} \quad a = k_o \frac{q^2}{m \frac{l^2}{2}} = \frac{2k_o q^2}{ml^2} = 1,1 \cdot 10^2 \text{ m/s}^2$$

3. Una sfera conduttrice uniformemente carica di raggio 1,5 m ha una densità superficiale di carica di $7,8 \mu\text{C}/\text{m}^2$.
- Qual è la carica sulla sfera?
 - Determina il flusso del campo elettrico uscente dalla superficie della sfera.
 - Determina il campo elettrico a 0,55 m dal centro della sfera e a 5,5 m dal centro della sfera.
- A. Sapendo che la densità superficiale σ è data dal rapporto tra carica e superficie e che la superficie della sfera è $4\pi r^2$, otteniamo:

$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad \Rightarrow \quad Q = \sigma S = 4\pi\sigma r^2 = \mathbf{2,2 \cdot 10^{-4} \text{ C}}$$

B. Per il teorema di Gauss: $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \mathbf{2,5 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}}}$.

C. Il campo elettrico all'interno della sfera, trattandosi di un conduttore, è **nullo**.

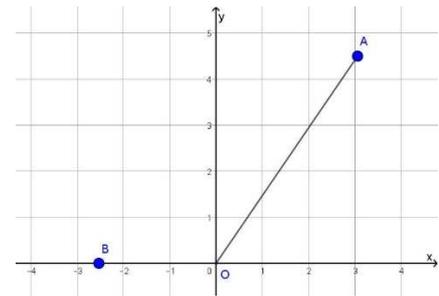
Il campo elettrico all'esterno della sfera, trattandosi di un conduttore, si determina considerando la carica come puntiforme e tutta concentrata nel centro della sfera:

$$E = k_o \frac{|Q|}{R^2} = \mathbf{6,6 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}}$$

4. Una carica $q_1 = -2,205 \mu\text{C}$ è posta nel punto di coordinate $(3,055 \text{ m}; 4,501 \text{ m})$; un'altra carica $q_2 = 1,800 \mu\text{C}$ è posta nel punto $(-2,533 \text{ m}; 0)$.
- Calcola il potenziale elettrico nell'origine.
 - Esiste un punto, sulla linea che congiunge le due cariche, in cui il potenziale è pari a zero. Determina la posizione (ovvero le coordinate) di tale punto.

A. Il potenziale è una grandezza scalare e, se determinato da una carica puntiforme, è dato da: $V = k_o \frac{q}{r}$, dove r è la distanza tra la carica e il punto. Nel caso in analisi, per determinare il potenziale nell'origine, devo fare la somma algebrica dei potenziali dovuti alle due cariche, q_1 posta nel punto A e q_2 posta nel punto B:

$$V = k_o \frac{q_1}{AO} + k_o \frac{q_2}{BO} = \mathbf{2,744 \text{ kV}}$$



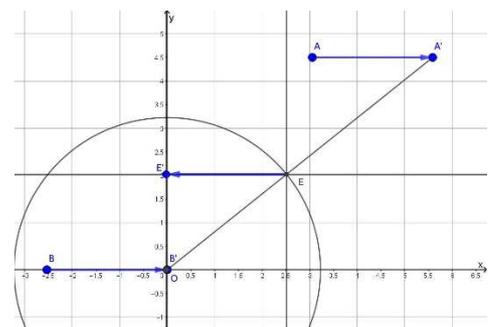
B. Per determinare il punto del segmento congiungente A e B (ovvero le posizioni delle cariche q_1 e q_2) nel quale il potenziale è nullo, dobbiamo risolvere l'equazione:

$$k_o \frac{q_1}{d-x} + k_o \frac{q_2}{x} = 0$$

Dove $d = \overline{AB}$ e a è la distanza del punto a potenziale nullo da B e le cariche q_1 e q_2 sono prese con i loro segni.

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{d-a}{a} = -\frac{q_1}{q_2} \quad \frac{d}{a} - 1 = -\frac{q_1}{q_2} \quad a = \frac{\overline{AB}}{1 - \frac{q_1}{q_2}}$$



Conosco la distanza del punto da una delle cariche, ma non conosco le sue coordinate. Per semplificare i passaggi, traslo le due cariche in modo che la carica q_2 venga a trovarsi nell'origine e la carica q_1 nel punto $A'((3,055 + 2,533) \text{ m}; 4,501 \text{ m})$ ovvero $A'(5,588 \text{ m}; 4,501 \text{ m})$. Determino le coordinate del punto a potenziale nullo facendo l'intersezione tra la circonferenza con centro nell'origine (ovvero in B') e raggio pari a a e la retta passante per i punti A' e B', ovvero:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y = \frac{y_{A'}}{x_{A'}} x \end{cases} \quad x^2 \left(1 + \left(\frac{y_{A'}}{x_{A'}} \right)^2 \right) = a^2 \quad \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_{A'}}{x_{A'}} \right)^2}} \\ y = \frac{y_{A'}}{x_{A'}} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_{A'}}{x_{A'}} \right)^2}} \end{cases}$$

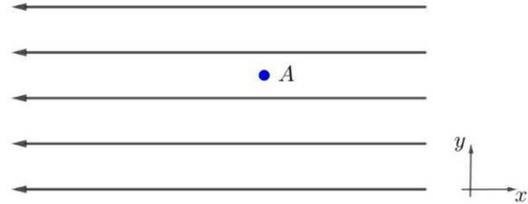
Per determinare le coordinate del punto a potenziale nullo rispetto alle posizioni A e B delle due cariche:

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_{A'}}{x_{A'}} \right)^2}} + x_B = \mathbf{-0,2154 \text{ m}} \quad y = \frac{y_{A'}}{x_{A'}} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_{A'}}{x_{A'}} \right)^2}} = \mathbf{2,023 \text{ m}}$$

5. Una particella in quiete, di massa 3,8 g e carica +0,045 μC , viene lasciata libera nel punto A della figura seguente.
- In quale direzione e verso si muoverà la carica, tenendo presente che le frecce rappresentano il campo elettrico?
 - Quale velocità avrà dopo aver percorso un tratto di 5,0 cm se il campo elettrico \vec{E} ha intensità 1200 N/C?
 - Supponi che la particella continui a muoversi per altri 5,0 cm. L'aumento di velocità per i successivi 5,0 cm sarà maggiore, minore o uguale all'aumento di velocità che ha subito nei primi 5,0 cm?

- La carica è positiva, perciò si muoverà seguendo la direzione e il verso del campo elettrico.
- Possiamo determinare l'accelerazione della carica usando la seconda legge della dinamica:

$$\begin{cases} F = Eq \\ F = ma \end{cases} \quad ma = Eq \quad a = \frac{Eq}{m}$$



Per le leggi della cinematica: $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$ e sapendo che la velocità iniziale è nulla, otteniamo:

$$\frac{v^2}{2s} = \frac{Eq}{m} \quad v = \sqrt{\frac{2Eqs}{m}} = 3,8 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$$

- Per confrontare i due aumenti di velocità, possiamo procedere in due modi. Possiamo determinare la velocità al termine del secondo tratto s, usando sempre la formula dell'accelerazione citata in precedenza:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Eqs}{m} + v^2} = \sqrt{v^2 + v^2} = v\sqrt{2} \quad \Delta v_1 = v_1 - v = v(\sqrt{2} - 1) \quad \Delta v = v$$

Dalle formule appena determinate, si vede con chiarezza che il secondo aumento di velocità è inferiore al primo:

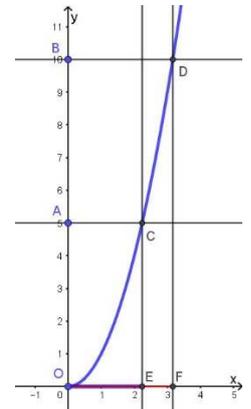
$$v(\sqrt{2} - 1) < v \quad \sqrt{2} < 2$$

Arriveremmo alla stessa conclusione considerando il grafico spazio-tempo del moto uniformemente accelerato in questione, ovvero una parabola con vertice nell'origine.

Consideriamo sull'asse y lo spostamento: il segmento OA corrisponde ai primi 5 cm di spostamento e AB ai successivi 5 cm. In corrispondenza di A e di B, possiamo determinare i punti, rispettivamente, C e D sulla parabola e da essi i punti E ed F, loro proiezioni sull'asse x (l'asse dei tempi). Come possiamo vedere, il segmento OE è più grande del segmento EF, che corrisponde al tempo necessario per compiere il secondo spostamento. Visto che la velocità è direttamente proporzionale al tempo, la variazione di velocità sarà minore nel secondo caso rispetto al primo, ovvero, partendo dalla legge: $v = v_0 + at = at$ visto che $v_0 = 0 \text{ m/s}$, perché la particella viene lasciata libera di muoversi in A. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} v_C - v_0 &= at_C - a \cdot 0 = a \cdot \overline{OE} \\ v_D - v_C &= at_D - at_C = a(t_D - t_C) = a \cdot \overline{EF} \end{aligned}$$

E per quanto detto sui segmenti OE ed EF, otteniamo quando detto in precedenza: $\Delta v_1 < \Delta v$.

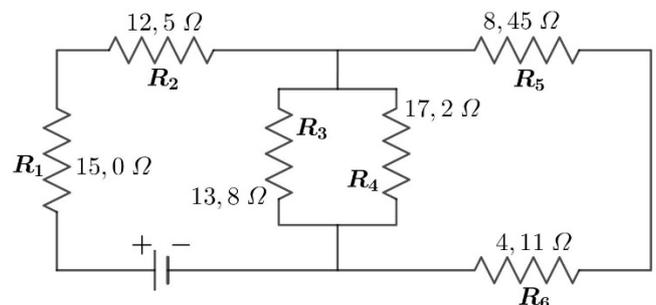


6. La corrente che scorre nella resistenza R_5 del circuito rappresentato in figura è 1,52 A. Qual è la tensione della batteria?

Risolvi il circuito determinando la resistenza equivalente e la corrente totale che circola nel circuito:

Le resistenze 5 e 6 sono collegate in serie, perciò la loro resistenza equivalente è data dalla somma delle due resistenze; le due resistenze sono collegate in parallelo con le resistenze 3 e 4 e, infine, le resistenze 1 e 2 sono collegate in serie con la resistenza ottenuta:

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6} \right)^{-1} + R_1 + R_2$$



La corrente totale è data dalla somma delle correnti circolanti in R_5 (che è la stessa che circola in R_6), in R_3 e R_4 . Siccome la differenza di potenziale ai capi del collegamento in serie tra R_5 e R_6 è la stessa che troviamo ai capi di R_3 e R_4 , allora:

$$i_3 R_3 = i_5 (R_5 + R_6) \quad \Rightarrow \quad i_3 = i_5 \frac{R_5 + R_6}{R_3} \quad i_4 R_4 = i_5 (R_5 + R_6) \quad \Rightarrow \quad i_4 = i_5 \frac{R_5 + R_6}{R_4}$$

Possiamo quindi determinare la tensione del generatore, applicando la legge di Ohm:

$$\Delta V = i R_{eq} = (i_3 + i_4 + i_5) R_{eq} = i_5 \left(1 + \frac{R_5 + R_6}{R_3} + \frac{R_5 + R_6}{R_4} \right) \left[\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6} \right)^{-1} + R_1 + R_2 \right] = 129 \text{ V}$$

7. Considera il circuito RC mostrato in figura:

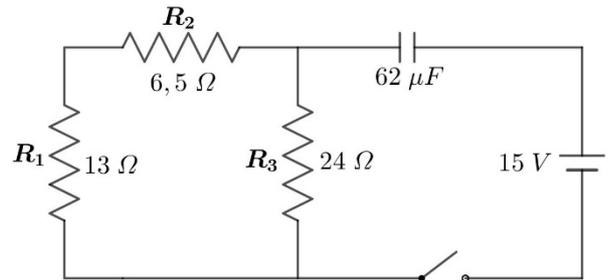
- A. Calcola la sua costante di tempo e la corrente iniziale.
 B. Si vuole aumentare la costante di tempo del circuito modificando il valore della resistenza da R_2 . Per ottenere l'effetto desiderato la resistenza deve essere aumentata o diminuita? Giustifica la risposta.

- A. La costante di tempo del circuito è data dal prodotto tra capacità del condensatore e resistenza equivalente. Per determinare la resistenza equivalente, ricordiamo che R_1 e R_2 sono collegati in serie tra loro e in parallelo con R_3 , quindi:

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}$$

Perciò la costante di tempo è:

$$\tau = CR_{eq} = 6,7 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$



La corrente iniziale è data dal rapporto tra forza elettromotrice e resistenza equivalente, ovvero:

$$i_o = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \Delta V \cdot \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 1,4 \text{ A}$$

- B. Siccome la costante di tempo è direttamente proporzionale alla resistenza equivalente, devo aumentare la resistenza equivalente per aumentare la costante di tempo. Per aumentare la resistenza equivalente, mantenendo costanti le altre due resistenze, non resta altro modo che aumentare la resistenza R_2 .

8. Il generatore che alimenta il circuito in figura ha una f.e.m. di 10 V e una resistenza interna trascurabile.

- A. Quanto vale la resistenza equivalente del circuito?
 B. Calcola l'intensità di corrente nel circuito e nelle tre resistenze da 2,0 Ω, 3,0 Ω e 6,0 Ω.
 C. Calcola la differenza di potenziale fra gli estremi della resistenza da 4,0 Ω.
 D. Quanto vale la differenza di potenziale fra i due nodi A e B del circuito?

- A. Per determinare la resistenza equivalente, considero le resistenze R_2 , R_3 e R_4 collegate in parallelo tra loro e in serie con la resistenza R_1 :

$$R_{eq} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)^{-1} = 5,0 \Omega$$

- B. Otteniamo la corrente totale del circuito con la legge di Ohm:

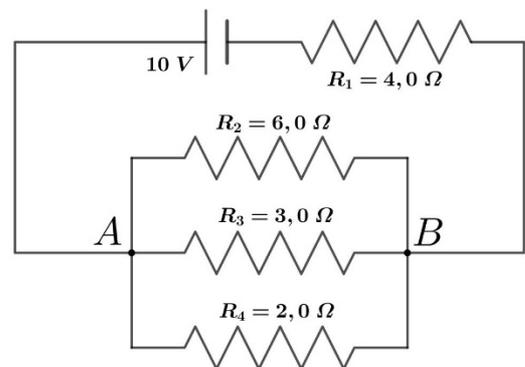
$$\Delta V = i R_{eq} \Rightarrow i = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = 2,0 \text{ A}$$

Visto che le tre resistenze sono collegate in parallelo, sappiamo che:

$$i = i_2 + i_3 + i_4$$

Sappiamo che, dato il collegamento in parallelo, la differenza di potenziale ai capi delle tre resistenze è la stessa, ovvero:

$$\begin{cases} i = i_2 + i_3 + i_4 \\ i_2 R_2 = i_3 R_3 \\ i_4 R_4 = i_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_3 = i_2 \frac{R_2}{R_3} = 2 i_2 \\ i_4 = i_2 \frac{R_2}{R_4} = 3 i_2 \\ i_2 + 2i_2 + 3i_2 = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_2 = \frac{1}{6} i = 0,33 \text{ A} \\ i_3 = \frac{1}{3} i = 0,67 \text{ A} \\ i_4 = \frac{1}{2} i = 1,0 \text{ A} \end{cases}$$



- C. Per calcolare la differenza di potenziale ai capi di R_1 , applico la legge di Ohm: $\Delta V_1 = i R_1 = 8,0 \text{ V}$.
 D. Per calcolare la differenza di potenziale fra i due nodi A e B, basta applicare la legge di Ohm a una qualsiasi delle tre resistenze collegate in parallelo, oppure sottrarre la differenza di potenziale della resistenza R_1 dalla tensione totale del circuito:

$$\Delta V_2 = \Delta V_3 = \Delta V_4 = i_4 R_4 = 2,0 \text{ V}$$

$$\Delta V_2 = \Delta V_3 = \Delta V_4 = \Delta V - \Delta V_1 = 2,0 \text{ V}$$