1. Tre cariche, $q_1 = +q$, $q_2 = -q$ e $q_3 = +q$, si trovano nei vertici di un triangolo equilatero.
   A. Disponi le cariche in ordine crescente rispetto all'intensità della forza cui sono soggette. Indica i casi di parità, se si presentano.
   B. Calcola l'angolo che definisce la direzione delle forze che agiscono su ciascuna delle cariche, dopo aver scelto in modo conveniente l'asse x.

A. Le forze agenti, indicate in blu o in rosso, sono repulsive quando le cariche sono concordi, come nel caso di q_1 e q_3 e attrattive come tutte le forze agenti su q_2 o per effetto di q_2. Dati gli angoli del triangolo equilatero, tutti di 60°, i parallelogrammi che si vengono a formare quando applichiamo la regola del parallelogramma per sommare le forze sono rombi, formati dall'unione di due triangoli equilateri: nel caso di q_1 e q_3 la forza risultante è lungo la diagonale minore e quindi ha modulo uguale ai suoi addendi, ovvero:

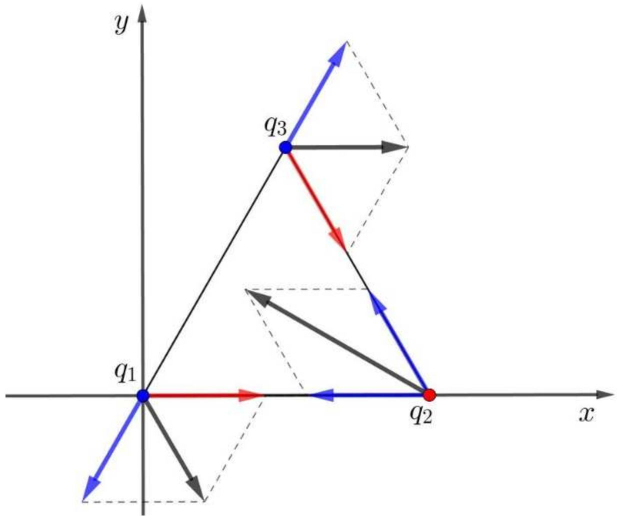
$$F_1 = F_3 = k_o \frac{q^2}{l^2}$$

La forza risultante agente su q_2, invece, ha come modulo la diagonale maggiore del rombo, ovvero:

$$F_2 = k_o \frac{q^2}{l^2} \cdot 2\sin 60° = \sqrt{3}\, k_o \frac{q^2}{l^2}$$

Disponendo le cariche in ordine crescente rispetto all'intensità della forza cui sono soggette, otteniamo:

$$\boldsymbol{q_1 = q_3 < q_2}$$



B. Sempre secondo considerazioni geometriche e di simmetria, otteniamo che l'angolo formato dalla forza risultante agente su q_1 è di 60° in senso antiorario a partire dalla direzione positiva dell'asse x, ovvero $\boldsymbol{\vartheta_1 = -60°}$, visto quanto detto riguardo al parallelogramma (rombo), formato da due triangoli equilateri. Nel caso della forza agente su q_2, visto che è la diagonale maggiore del rombo è anche la bisettrice dell'angolo da cui esce, quindi forma un angolo di 30° con la direzione negativa dell'asse x e, considerando la direzione positiva, è: $\boldsymbol{\vartheta_2 = 150°}$. Per quanto riguarda, infine, la carica q_3, la risultante forma un angolo di 60° con il lato che congiunge q_2 e q_3, quindi un angolo di 0° con la direzione positiva dell'asse x: $\boldsymbol{\vartheta_3 = 0°}$.

2. Il campo elettrico nel punto $x = 5{,}00\ cm$ e $y = 0$ punta nella direzione positiva dell'asse x e ha un'intensità di 10,0 N/C. Nel punto $x = 10{,}0\ cm$ e $y = 0$, il campo elettrico punta nella direzione positiva dell'asse x e ha un'intensità di 15,0 N/C. Assumendo che tale campo elettrico sia prodotto da una singola carica puntiforme, determina la sua posizione, il suo segno e il suo valore.

Visto che il campo elettrico aumenta procedendo lungo la direzione positiva dell'asse x, allora la carica è negativa e si trova più avanti lungo l'asse x, a una distanza d dalla carica posizionata più avanti lungo l'asse x e a una distanza $d + 5{,}00\ cm = d + a$ dalla carica più indietro. Otteniamo quindi le equazioni:

$$\begin{cases} k_o \dfrac{|q|}{(d+a)^2} = 10{,}0 \\ k_o \dfrac{|q|}{d^2} = 15{,}0 \end{cases} \qquad \begin{cases} |q| = (d+a)^2 \dfrac{10}{k_o} \\ k_o \dfrac{(d+a)^2}{d^2} \dfrac{10}{k_o} = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d+a}{d}\right)^2 = \dfrac{3}{2} \\ |q| = (d+a)^2 \dfrac{10}{k_o} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + \dfrac{a}{d} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ |q| = (d+a)^2 \dfrac{10}{k_o} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1} \\ |q| = \left(\dfrac{a\sqrt{\dfrac{3}{2}}}{\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1}\right)^2 \dfrac{10}{k_o} \end{cases} \qquad \begin{cases} d = \dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1} = 0{,}22\ m \\ q = \dfrac{3a^2}{2\sqrt{6} - 5} \dfrac{10}{k_o} = -83\ pC \end{cases}$$

Quindi la carica che genera il campo elettrico è di $\boldsymbol{-83\ pC}$ e si trova nella posizione $\boldsymbol{x = 0{,}32\ m}$ e $\boldsymbol{y = 0\ m}$.

3. Quattro cilindri conduttori sono fatti dello stesso materiale, ma differiscono per lunghezza e diametro. Il primo ha lunghezza 3L e diametro 2D, il secondo 2L e D, il terzo L e D, il quarto L e 2D. Essi sono collegati a quattro batterie diverse che erogano la tensione necessaria a far scorrere nei circuiti la stessa corrente. Ordina le quattro tensioni V_1, V_2, V_3 e V_4 per valori crescenti, indicando le uguaglianze se necessario.

Le quattro tensioni sono direttamente proporzionali alla resistenza dei quattro cilindri. Le resistenze dei quattro cilindri sono, dalla seconda legge di Ohm, date da: $R = \rho\frac{L}{S}$. La resistività ρ è uguale per tutti e quattro i cilindri, mentre cambiano lunghezza e superficie:

$$R_1 = \rho\frac{3L}{\pi D^2} = 3\,\rho\frac{L}{\pi D^2} \qquad R_2 = \rho\frac{2L}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = 8\,\rho\frac{L}{\pi D^2}$$

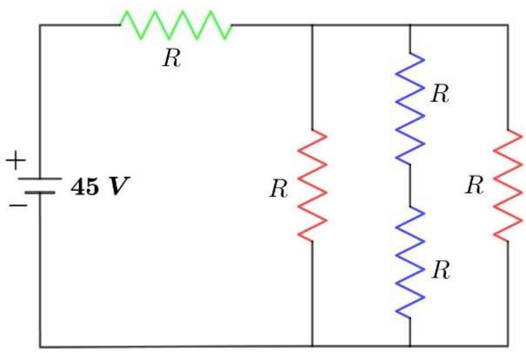
$$R_3 = \rho\frac{L}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = 4\,\rho\frac{L}{\pi D^2} \qquad R_4 = \rho\frac{L}{\pi D^2}$$

Riassumendo: $R_1 = 3R$, $R_2 = 8R$, $R_3 = 4R$ e $R_4 = R$. Quindi, l'ordine crescente delle quattro tensioni è: $\boldsymbol{V_4 < V_1 < V_3 < V_2}$.

4. Il circuito in figura 1 contiene cinque resistori identici. La batteria da 45 V fornisce una potenza di 58 W al circuito. Calcola la resistenza R di ciascun resistore.

Cominciamo con il determinare la resistenza equivalente: le due resistenze indicate in blu sono collegate in serie, quindi hanno resistenza equivalente 2R; questa resistenza è collegata in parallelo con le due resistenze indicate in rosso, perciò hanno resistenza equivalente:

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{2}{5}R$$



Questa resistenza è poi collegata in serie con la resistenza verde e, a questo punto, la resistenza equivalente è pari a: $R_{eq} = \frac{2}{5}R + R = \frac{7}{5}R$.
Dalla prima legge di Ohm sappiamo che $\Delta V = iR_{eq}$ e dalla definizione di potenza sappiamo che $P = i\Delta V$, quindi:

$$i = \frac{P}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{P}{\Delta V}R_{eq}$$

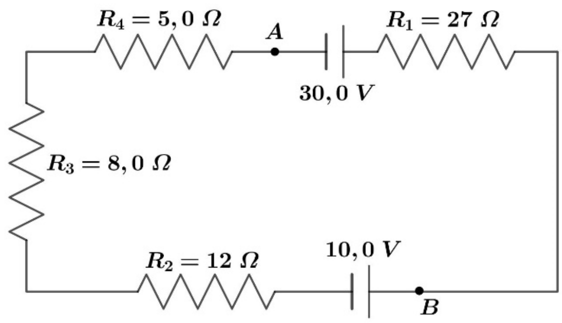
$$R_{eq} = \frac{(\Delta V)^2}{P} \qquad \frac{7}{5}R = \frac{(\Delta V)^2}{P} \qquad R = \frac{5}{7}\frac{(\Delta V)^2}{P} = \mathbf{25\ \Omega}$$

5. Considera il circuito in figura 2.
   A. Determina l'intensità della corrente nel circuito.
   B. Determina la differenza di potenziale fra i punti A e B.

A. Applico la legge delle maglie di Kirchhoff, considerando $\Delta V_1 = 30{,}0\ V$ e $\Delta V_2 = 10{,}0\ V$:

$$\Delta V_1 - iR_1 - \Delta V_2 - iR_2 - iR_3 - iR_4 = 0$$

$$i = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \mathbf{0{,}38\ A}$$



B. La differenza di potenziale tra i punti A e B è data da:

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_1 - iR_1 = \mathbf{19{,}6\ V}$$