1. Dato il triangolo ABC, di vertici A (4; – 3), B (0; 3) e C (– 7; – 6), determinane le coordinate del baricentro, il perimetro e l'area.

Determino le coordinate del baricentro G del triangolo: $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\,;\,\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) = \left(\frac{4-7}{3}\,;\,\frac{-3+3-6}{3}\right) = (-1\,;\,-2)$

Determino le misure delle lunghezze dei singoli lati: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$

$\overline{BC} = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}$

$\overline{AC} = \sqrt{121+9} = \sqrt{130}$

Il perimetro è dato dalla somma dei lati: $2p = 2\sqrt{13} + \sqrt{130} + \sqrt{130} = 2\left(\sqrt{13} + \sqrt{130}\right)$

Trattandosi di un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base coincide con la mediana, perciò per determinare la lunghezza della base, calcolo il punto medio M della base $\overline{AB}$ e poi calcolo l'altezza $\overline{MC}$.

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right) = (2;0) \Rightarrow \overline{MC} = \sqrt{9^2+6^2} = 3\sqrt{13}$$

A questo punto, posso calcolare l'area del triangolo: $A_{ABC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{MC}}{2} = \frac{2\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{13}}{2} = 39$

2. Dati due punti A (– 2; 1) e B (3; – 2), determina il punto Q, interno al segmento $\overline{AB}$, tale che $5\,\overline{AQ} \cong 3\,\overline{QB}$. Considerata poi la retta r, perpendicolare al segmento $\overline{AB}$ e passante per Q, individua su di essa il punto C con ordinata doppia dell'ascissa. Determina infine l'area del triangolo ABC.

Considero le proiezioni A', B', Q' rispettivamente dei punti A, B e Q sull'asse x. Per il teorema di Talete, considerando le proiezioni $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$, ovvero il fascio di rette parallele intersecato dalle due trasversali (il segmento $\overline{AB}$ e l'asse x), i segmenti che si formano sulla prima trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti che si formano sulla seconda trasversale, perciò: $5\,\overline{A'Q'} \cong 3\,\overline{Q'B'}$. In termini di equazioni: $5\,(x+2) = 3\,(3-x)$, dove x è l'ascissa di Q. Essendo Q interno al segmento $\overline{AB}$, $-2 < x < 3$, perciò non servono i valori assoluti. Dall'equazione, possiamo facilmente ricavare l'ascissa di Q: $x = -\frac{1}{8}$.

Applichiamo un procedimento analogo per determinare l'ordinata di Q e trovando l'equazione: $5\,(1-y) = 3\,(y+2)$, con $-2 < y < 1$, perciò: $y = -\frac{1}{8}$.

$Q\left(-\frac{1}{8}\,;\,-\frac{1}{8}\right)$

Per determinare l'equazione della retta r, determino il coefficiente angolare del segmento $\overline{AB}$: $m_{\overline{AB}} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = -\frac{3}{5}$

Determino la retta r: $y - y_Q = -\frac{1}{m_{\overline{AB}}}\,(x - x_Q) \Rightarrow y + \frac{1}{8} = \frac{5}{3}\left(x+\frac{1}{8}\right)$

Sulla retta r devo determinare il punto C con ordinata doppia dell'ascissa, ovvero di coordinate $C\,(x;2x)$. Sapendo che se il punto appartiene alla retta, allora soddisfa la sua equazione, sostituisco le coordinate generiche di C nell'equazione della retta r:

$$2x + \frac{1}{8} = \frac{5}{3}\left(x+\frac{1}{8}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}\,x = \frac{1}{12} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow C\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$$

A questo punto possiamo calcolare l'area del triangolo ABC: $A_{ABC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{QC}}{2}$

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34} \qquad \overline{QC} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{8}$$

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{QC}}{2} = \frac{\sqrt{34}\cdot\frac{\sqrt{34}}{8}}{2} = \frac{17}{8}$$

3. Sia dato il trapezio isoscele ABCD, di base minore $\overline{AB}$, A (– 4; – 6) e B (8; 3) e la base maggiore $\overline{CD}$ adagiata sulla retta r di equazione 3x – 4y + 13 = 0. Sapendo che $\overline{CD} \cong \frac{5}{3}\overline{AB}$, determina l'area del trapezio.

Determino innanzi tutto la lunghezza della base $\overline{AB}$: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

Posso quindi determinare la lunghezza della base $\overline{CD}$: $\overline{CD} \cong \frac{5}{3}\overline{AB} = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25$.

Per avere l'area del trapezio, serve l'altezza, che posso determinare come distanza del punto A dalla retta r, di equazione nota:

$$\overline{AH} = \frac{|\,a\,x_A + b\,y_A + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-12 + 24 + 13|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Ora posso determinare l'area del trapezio:

$$A = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{40 \cdot 5}{2} = 100$$