1. Determina il valore di *k*, perché, dati i punti $A\,(2k-1;\,3k-5)$ e $B\,(k-2;\,2k-6)$, sia $\overline{AB}=2\sqrt{2}$

Pongo la distanza tra A e B uguale a $2\sqrt{2}$ o meglio: $\overline{AB}^2=8$

$$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=8$$
$$(2k-1-k+2)^2+(3k-5-2k+6)^2=8$$
$$(k+1)^2+(k+1)^2=8 \quad\Rightarrow\quad 2\,(k+1)^2=8 \quad\Rightarrow\quad (k+1)^2=4$$

Ovvero:

$$k+1=2 \quad\Rightarrow\quad k=1$$
$$k+1=-2 \quad\Rightarrow\quad k=-3$$

2. Dati i punti $A\,(1;\,3)$, $B\,(3;\,4)$ e $C\,(a;\,1)$, determina il valore di a in modo che il triangolo ABC risulti isoscele sulla base AB.

Essendo il triangolo isoscele, so che: $\overline{AC}\cong\overline{BC}$, ovvero: $\overline{AC}^2\cong\overline{BC}^2$

$$(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2=(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2$$
$$(1-a)^2+(3-1)^2=(3-a)^2+(4-1)^2$$
$$1+a^2-2a+4=9+a^2-6a+9 \quad\Rightarrow\quad 4a-13=0 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{13}{4}$$

3. Determina le coordinate del baricentro G e del circocentro C del triangolo OAB di vertici $O\,(0;\,0)$, $A\,(3;\,2)$ e $B\,(6;\,-4)$.

Determino il baricentro del triangolo usando la regola: $G\left(\dfrac{x_O+x_A+x_B}{3};\,\dfrac{y_O+y_A+y_B}{3}\right) \Rightarrow G\left(3;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Essendo il circocentro il punto d'incontro degli assi di un triangolo, determino gli assi dei lati OA e OB, metto a sistema le due equazioni così trovate e trovo le coordinate del circocentro:

Asse di OA:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_O)^2+(y-y_O)^2$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=(x-0)^2+(y-0)^2$$
$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=x^2+y^2$$
$$6x+4y-13=0$$

Asse di OB:

$$(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=(x-x_O)^2+(y-y_O)^2$$
$$(x-6)^2+(y+4)^2=(x-0)^2+(y-0)^2$$
$$x^2-12x+36+y^2+8y+16=x^2+y^2$$
$$3x-2y-13=0$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 13 \\ 6x - 4y = 26 \end{cases}$$
$$12x = 39$$
$$x = \frac{13}{4}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 13 \\ -6x + 4y = -26 \end{cases}$$
$$8y = -13$$
$$y = -\frac{13}{8}$$

$$C\left(\frac{13}{4}; -\frac{13}{8}\right)$$

4. Calcola il perimetro del triangolo di vertici: $A\,(3; -5)$, $B\,(3; 4)$, $C\,(-1; 7)$.

Determino la lunghezza dei singoli lati:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = 9$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (4-7)^2} = 5$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (-5-7)^2} = 4\sqrt{1+9} = 4\sqrt{10}$$

Perciò: $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 14 + 4\sqrt{10}$

5. Verifica che il quadrilatero ABCD, di vertici $A\,(2; 2)$, $B\,(8; -2)$, $C\,(10; 1)$, $D\,(4; 5)$, è un rettangolo.

Verifico innanzi tutto che si tratta di un parallelogrammo, visto che le due diagonali hanno lo stesso punto medio:

$$M_{\overline{AC}}\left(6; \frac{3}{2}\right) \equiv M_{\overline{BD}}\left(6; \frac{3}{2}\right)$$

Perché sia un rettangolo, deve avere le diagonali congruenti:

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2-10)^2 + (2-1)^2} = 65$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{(8-4)^2 + (-2-5)^2} = 65$$

c.v.d.

6. Un rettangolo ABCD ha i lati paralleli agli assi coordinati, il centro nell'origine O e un vertice nel punto di coordinate $(3; -8)$. Trova le coordinate degli altri vertici e calcolane perimetro, area e misura delle diagonali.

Gli altri vertici del rettangolo sono simmetrici rispetto agli assi e rispetto all'origine del punto dato, ovvero:

$$A\,(3;8);\ B\,(-3;8);\ C\,(-3;-8);\ D\,(3;-8)$$

Per determinare il perimetro, calcolo la lunghezza di due lati consecutivi:

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = 6 \qquad \overline{BC} = |y_C - y_B| = 16$$

$$2p = 2(\overline{AB} + \overline{BC}) = 2(6+16) = 44$$

Calcolo l'area: $A = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 6 \cdot 16 = 96$

Determino la lunghezza di una delle diagonali (visto che in un rettangolo le diagonali sono congruenti):

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(3+3)^2 + (8+8)^2} = 2\sqrt{9+64} = 2\sqrt{73}$$

7. Dati i tre punti $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(7;7)$, calcola MN con M ed N rispettivamente punti medi dei segmenti AB e BC e verifica che $2\,\overline{MN} \cong \overline{AC}$.

Determino i punti medi M di AB e N di BC:

$$M = M_{\overline{AB}}(3;2) \qquad N = M_{\overline{BC}}(6;5)$$

Calcolo la lunghezza dei segmenti MN e AC:

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (7-1)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(3-6)^2 + (2-5)^2} = 3\sqrt{2}$$

Perciò: $2\,\overline{MN} \cong \overline{AC}$ infatti: $2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$c.v.d.$

8. Dati due vertici di un triangolo ABC e il baricentro G, determina il terzo vertice.
$A(0;-5)$, $B(-2;7)$, $G(1;1)$

Per determinare le coordinate del baricentro di un triangolo, noti i vertici del triangolo, si applica la formula:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Bisogna quindi determinare le formule inverse:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \Rightarrow \quad 3x_G = x_A + x_B + x_C \quad \Rightarrow \quad x_C = 3x_G - x_A - x_B = 5$$

Analogamente per l'ordinata:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad \Rightarrow \quad 3y_G = y_A + y_B + y_C \quad \Rightarrow \quad y_C = 3y_G - y_A - y_B = 1$$

$$C(5;1)$$