9. Determina i valori di a e b affinché il triangolo di vertici $A\,(2a+1;\,3)$, $B\,(4a;\,2b)$, $C\,(-1;\,b+6)$ abbia per baricentro il punto $G\,(3;\,3)$.

Per determinare le coordinate del baricentro di un triangolo, noti i vertici del triangolo, si applica la formula:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

Perciò:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\quad\Rightarrow\quad 3=\frac{2a+1+4a-1}{3}\quad\Rightarrow\quad \boxed{a=\frac{3}{2}}$$

Analogamente per l'ordinata:

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\quad\Rightarrow\quad 3=\frac{3+2b+b+6}{3}\quad\Rightarrow\quad \boxed{b=0}$$

10. Determina l'area del triangolo ABC sapendo che $A\,(4;-1)$, $B\,(6;5)$, $C\,(-2;9)$.

Applico la formula per calcolare l'area, usando la matrice così determinata:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 6 & 5 & 1\\ -2 & 9 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[20+2+54-(-10-6+36)]=\frac{1}{2}(76-20)=\boxed{28}$$

11. Determina i punti dell'asse x aventi distanza uguale a $2\sqrt{2}$ dal punto $A\,(2;-2)$.

Essendo un punto dell'asse x ha generiche coordinate: $P\,(x;\,0)$. Pongo la sua distanza da A uguale a $2\sqrt{2}$.

$$\overline{AP}=2\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad \overline{AP}^2=8$$

$$(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2=8\quad\Rightarrow\quad (2-x)^2+(-2-0)^2=8\quad\Rightarrow\quad (2-x)^2=4$$

Ovvero:

$$2-x=2\quad\Rightarrow\quad x=0\quad\Rightarrow\quad \boxed{(0;0)}$$

$$2-x=-2\quad\Rightarrow\quad x=4\quad\Rightarrow\quad \boxed{(4;0)}$$

12. Determinare le coordinate dei punti aventi l'ascissa uguale a $1/3$ dell'ordinata e che distano 1 dal punto (1; 0).

I punti che hanno ascissa uguale a 1/3 dell'ordinata hanno coordinate generiche: $P\ (3x\,;\,x)$. Pongo la distanza dal punto A (1; 0) uguale a 1, ovvero: $\overline{AP}^2 = 1$

$$(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (1-3x)^2 + (0-x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - 6x + 9x^2 + x^2 = 1$$

$$10x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{5} \end{array} \right.$$

Perciò i due punti che soddisfano le condizioni richieste hanno coordinate: $(0;\,0)\ \ e\ \ \left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$

13. Dato il punto $A\,(3;\,9)$, determina le coordinate dei punti M aventi ordinata tripla dell'ascissa e tali che: $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MO}} = \dfrac{3}{4}$.

Il generico punto M ha coordinate: $M\ (x;\,3x)$, perciò, applicando la relazione $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MO}} = \dfrac{3}{4}$, cioè: $4\ \overline{MA} = 3\ \overline{MO}$:

$$16\ \overline{MA}^2 = 9\ \overline{MO}^2 \quad \Rightarrow \quad 16\,[(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2] = 9\,[(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2]$$

$$16\,[(x-3)^2 + (3x-9)^2] = 9\,[(x-0)^2 + (3x-0)^2]$$

$$16\,(x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 54x + 81) = 9\,(x^2 + 9x^2)$$

$$16\,(10\,x^2 - 60\,x + 90) = 9\,(10\,x^2) \quad \Rightarrow \quad 16\,(x^2 - 6x + 9) = 9\,x^2$$

$$16x^2 - 96x + 144 - 9\,x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 7x^2 - 96x + 144 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 7\cdot 144}}{7} = \frac{48 \pm 12\,\sqrt{16-7}}{7} = \frac{48 \pm 36}{7} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 12 \\ x_2 = \dfrac{12}{7} \end{array} \right.$$

Perciò i due punti che soddisfano le condizioni richieste hanno coordinate: $(12;\,36)\ \ e\ \ \left(\frac{12}{7};\frac{36}{7}\right)$

14. Sono dati i punti $A\,(2;\,3)$ e $B\,(5;\,3)$. Determina un punto C in modo che il triangolo ABC sia rettangolo in B ed abbia per area $15/2$.

Determino innanzi tutto la lunghezza del segmento AB: $\overline{AB} = |x_B - x_A| = 3$

Perché abbia area 15/2, il cateto BC deve avere misura: $A = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \dfrac{2 \cdot A}{\overline{AB}} = \dfrac{15}{3} = 5$.

Applicando il teorema di Pitagora, determino la lunghezza dell'ipotenusa AC: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{34}$.

Ora metto a sistema le due condizioni, ovvero la lunghezza del lato AC e quella del lato BC:

$$\begin{cases} \overline{AC} = \sqrt{34} \\ \overline{BC} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AC}^2 = 34 \\ \overline{BC}^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = 34 \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-x)^2 + (3-y)^2 = 34 \\ (5-x)^2 + (3-y)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-y)^2 = 34 - (2-x)^2 \\ (5-x)^2 + 34 - (2-x)^2 = 25 \end{cases}$$

Risolvendo la seconda equazione:

$$25 - 10x + x^2 + 34 - 4 + 4x - x^2 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad -6x + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Sostituendo il risultato così ottenuto nella prima equazione:

$$(3-y)^2 = 34 - (2-5)^2 \quad \Rightarrow \quad (3-y)^2 = 25$$

Ovvero:

$$3 - y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = -2 \quad \Rightarrow \quad (5;\,-2)$$

$$3 - y = -5 \quad \Rightarrow \quad y = 8 \quad \Rightarrow \quad (5;\,8)$$