15. Il triangolo ABC ha per vertici i punti $A(2;1)$, $B\left(-4;\frac{7}{2}\right)$ e $C\left(-\frac{16}{5};-\frac{29}{10}\right)$. Verifica che il triangolo è isoscele e determinane perimetro e area.

Determino la misura dei tre lati:

$$\overline{AB}=\sqrt{(2+4)^2+\left(1-\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{36+\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{144+25}=\frac{1}{2}\sqrt{169}=\frac{13}{2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\left(-4+\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{2}+\frac{29}{10}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{32}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\sqrt{1+8^2}=\frac{4}{5}\sqrt{65}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{\left(2+\frac{16}{5}\right)^2+\left(1+\frac{29}{10}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{26}{5}\right)^2+\left(\frac{39}{10}\right)^2}=\frac{13}{5}\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{13}{5}\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{13}{2}$$

Dalle misure determinate, si può notare che: $\overline{AB}\cong\overline{AC}$, perciò il triangolo è isoscele.

Per determinare il perimetro, faccio la somma dei lati: $2p=\frac{13}{2}+\frac{4}{5}\sqrt{65}+\frac{13}{2}=\boxed{13+\frac{4}{5}\sqrt{65}}$

Trattandosi di un triangolo isoscele, per calcolare l'area determino innanzi tutto il punto medio M della base $\overline{BC}$ e poi calcolo la distanza $\overline{AM}$, ovvero l'altezza (in un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base coincide con la mediana).

$$M\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-4-\frac{16}{5}}{2};\frac{\frac{7}{2}-\frac{29}{10}}{2}\right)=\left(-\frac{18}{5};\frac{3}{10}\right)$$

$$\overline{AM}=\sqrt{\left(2+\frac{18}{5}\right)^2+\left(1-\frac{3}{10}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{28}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^2}=\frac{7}{5}\sqrt{4^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{64+1}{4}}=\frac{7}{10}\sqrt{65}$$

A questo punto, posso calcolare l'area:

$$A=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{65}\cdot\frac{7}{10}\sqrt{65}=\frac{7}{25}\cdot 65=\boxed{\frac{91}{5}}$$

Avrei potuto calcolare l'area, visto che conoscevo le coordinate dei tre vertici, usando la matrice:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_A-x_C & y_A-y_C\\ x_B-x_C & y_B-y_C\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2+\frac{16}{5} & 1+\frac{29}{10}\\ -4+\frac{16}{5} & \frac{7}{2}+\frac{29}{10}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{26}{5}\cdot\frac{32}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{39}{10}\right)=\boxed{\frac{91}{5}}$$

Volendo si può usare anche la formula di Erone, ma in tal caso bisogna avere un po' di dimestichezza con i radicali…

$$A=\sqrt{p\,(p-\overline{AB})\,(p-\overline{BC})\,(p-\overline{AC})}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}+\frac{2}{5}\sqrt{65}\right)\left(\frac{2}{5}\sqrt{65}\right)\left(\frac{2}{5}\sqrt{65}\right)\left(\frac{13}{2}-\frac{2}{5}\sqrt{65}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{169}{4}-\frac{4}{25}\cdot 65\right)\frac{4}{25}\cdot 65}=\frac{2}{5}\cdot 13\sqrt{\left(\frac{13}{4}-\frac{4}{5}\right)\cdot 5}=\frac{2}{5}\cdot 13\sqrt{\frac{49}{20}\cdot 5}=\frac{2}{5}\cdot 13\cdot\frac{7}{2}=\boxed{\frac{91}{5}}$$

16. Calcola le coordinate del punto P posto sull'asse x ed equidistante dai punti $A\,(1;\,3)$ e $B\,(5;\,1)$.

Il generico punto P, essendo posto sull'asse x, ha coordinate: $P\,(x;\,0)$. L'unica condizione è l'equidistanza da A e B:

$$\overline{AP} \cong \overline{BP} \quad \Rightarrow \quad \overline{AP}^2 \cong \overline{BP}^2 \quad \Rightarrow \quad (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2$$

$$(x-1)^2 + (0-3)^2 = (x-5)^2 + (0-1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + 9 = x^2 - 10x + 25 + 1$$

$$8x = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \qquad\qquad P\,(2;\,0)$$

17. Dati i punti $A\,(2;\,4)$, $B\,(9;\,2)$ e $C\left(x;\,\dfrac{47}{4}\right)$, determina x in modo che il triangolo ABC sia isoscele sulla base $\overline{AB}$.

Perché il triangolo sia isoscele sulla base $\overline{AB}$, deve verificarsi la congruenza: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, ovvero: $\overline{AC}^2 \cong \overline{BC}^2$.

$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$$

$$(x-2)^2 + \left(\frac{47}{4} - 4\right)^2 = (x-9)^2 + \left(\frac{47}{4} - 2\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + \left(\frac{31}{4}\right)^2 = x^2 - 18x + 81 + \left(\frac{39}{4}\right)^2$$

$$14x = 112 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

18. Dati i punti $A\,(-3;\,-1)$, $B\,(0;\,5)$ e $C\,(-x;\,4-x)$, determina x in modo che il triangolo ABC abbia area 9.

Per calcolare l'area del triangolo ABC, applico la seguente formula:

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3+x & -1-4+x \\ 0+x & 5-4+x \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}[(x-3)(x+1) - x(x-5)]\right|$$

Risolvendo l'equazione:

$$\left|\frac{1}{2}[(x-3)(x+1) - x(x-5)]\right| = 9$$ determino il valore di x richiesto.

$$\left|x^2 + x - 3x - 3 - x^2 + 5x\right| = 18$$

$$|3x-3| = 18 \quad \Rightarrow \quad |x-1| = 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-1=6 \\ x-1=-6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x=7 \\ x=-5 \end{array}$$

19. Dati i punti $A(2; a-1)$ e $B(a+2; 3a)$, stabilisci per quale valore del parametro *a* il punto medio del segmento $\overline{AB}$ ha le coordinate uguali.

Determino le coordinate del generico punto medio M del segmento $\overline{AB}$:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{2+a+2}{2}; \frac{a-1+3a}{2}\right) = \left(\frac{a+4}{2}; \frac{4a-1}{2}\right)$$

Pongo le due coordinate uguali e, in questo modo, determino il valore di *a*:

$$\frac{a+4}{2} = \frac{4a-1}{2} \quad \Rightarrow \quad -3a = -5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{5}{3}}$$

20. Determina a in modo che il punto medio del segmento di estremi $A(2a-1; 1)$ e $B\left(a; \frac{a-2}{2}\right)$ disti $\frac{\sqrt{17}}{4}$ dall'origine.

Determino innanzi tutto le generiche coordinate del punto medio del segmento $\overline{AB}$:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{2a-1+a}{2}; \frac{1+\frac{a-2}{2}}{2}\right) = \left(\frac{3a-1}{2}; \frac{a}{4}\right)$$

Pongo la distanza di M dall'origine uguale a $\frac{\sqrt{17}}{4}$:

$$\overline{MO} = \sqrt{(x_O-x_M)^2+(y_O-y_M)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4} \quad \Rightarrow \quad (x_O-x_M)^2+(y_O-y_M)^2 = \frac{17}{16}$$

$$\left(0-\frac{3a-1}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{17}{16} \qquad \frac{9a^2-6a+1}{4} + \frac{a^2}{16} = \frac{17}{16}$$

$$36a^2 - 24a + 4 + a^2 = 17 \quad \Rightarrow \quad 37a^2 - 24a - 13 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144+481}}{37} = \frac{12 \pm 25}{37} = \left\langle \boxed{\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = -\frac{13}{37} \end{array}} \right.$$

21. Dati i punti $A\,(1;\,2)$ e $D\,(k;\,k+1)$, per quali valori di k si ottiene $\overline{AD} = \sqrt{2}$?

Pongo il segmento $\overline{AD} = \sqrt{2}$:

$$\sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = 2$$

$$(1-k)^2 + (2-k-1)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad (1-k)^2 + (1-k)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2\,(1-k)^2 = 2$$

$$(1-k)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1-k = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 2 \end{array}$$

I due valori di k così ottenuti determinano due punti D_1 e D_2 simmetrici rispetto ad A.

22. Nel triangolo di vertici A (7; 4), B (2; 1), C (9; - 2) trova la distanza del vertice A dal baricentro.

Determino innanzi tutto le coordinate del baricentro G del triangolo:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3};\, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\frac{7+2+9}{3};\, \frac{4+1-2}{3}\right) = (6;\,1)$$

Determino la lunghezza del segmento $\overline{GA}$:

$$\overline{AG} = \sqrt{(x_A - x_G)^2 + (y_A - y_G)^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$