Risolvi le seguenti equazioni e i seguenti sistemi:

1. $x^2-(\sqrt{3}-x)(x+\sqrt{3})-(x\sqrt{5}+1)(x\sqrt{5}-1)=2x\left(\sqrt{2}-2x\right)-3$

$x^2-3+x^2-5x^2+1=2\sqrt{2}\,x-4x^2-3 \qquad x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0 \qquad x_{1,2}=\mathbf{\sqrt{2}\pm 1}$

2. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x^2-x}+\frac{x}{1-x}$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x(x-1)}+\frac{x}{x-1}=0 \qquad C.A.: x\neq 0 \quad \wedge \quad x\neq 1$$

$$x-1+x-2+x^2=0 \qquad x^2+2x-3=0 \qquad x_{1,2}=-1\pm 2=\left\langle\begin{matrix}1 \ n.a. per\ c.a.\\ \mathbf{-3}\end{matrix}\right.$$

3. $\left(3-\frac{1}{x+2}\right)\left(1+\frac{7x+2}{x^2-3x+2}\right)=\frac{12}{2-x}+\frac{x+1}{x-1}$

$$\frac{3x+6-1}{x+2}\cdot\frac{x^2-3x+2+7x+2}{x^2-3x+2}=-\frac{12}{x-2}+\frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{3x+5}{x+2}\cdot\frac{(x+2)^2}{(x-2)(x-1)}=\frac{-12x+12+x^2-x-2}{(x-2)(x-1)}$$

$$\frac{3x^2+11x+10}{(x-2)(x-1)}=\frac{x^2-13x+10}{(x-2)(x-1)} \qquad C.A.: x\neq 1 \quad \wedge \quad x\neq \pm 2$$

$$2x^2+24x=0 \qquad x(x+12)=0 \qquad \mathbf{x_1=0} \qquad \mathbf{x_2=-12}$$

4. $x^6-9x^3+8=0$

$$(x^3-8)(x^3-1)=0 \qquad (x-2)(x^2+2x+4)(x-1)(x^2+x+1)=0 \qquad \mathbf{x_1=1} \qquad \mathbf{x_2=2}$$

5. $\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^4-13\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2+36=0$

$$C.A.:\ x\neq 4 \qquad Pongo\ \left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2=y \qquad y^2-13y+36=0 \qquad y_{1,2}=\frac{13\pm 5}{2}=\left\langle\begin{matrix}9\\4\end{matrix}\right.$$

$$\frac{x+2}{x-4}=2 \qquad x+2=2x-8 \qquad \mathbf{x=10} \qquad \frac{x+2}{x-4}=-2 \qquad x+2=-2x+8 \qquad \mathbf{x=2}$$

$$\frac{x+2}{x-4}=3 \qquad x+2=3x-12 \qquad \mathbf{x=7} \qquad \frac{x+2}{x-4}=-3 \qquad x+2=-3x+12 \qquad \mathbf{x=\frac{5}{2}}$$

6. $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=2\\ x^2-xy=-4\end{cases}$

$$\begin{cases}y=8-2x\\ x^2-x\,(8-2x)=-4\end{cases} \qquad x^2-8x+2x^2+4=0 \qquad 3x^2-8x+4=0 \qquad x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{3}$$

$$\begin{cases}\mathbf{x_1=2}\\ \mathbf{y_1=4}\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{x_2=\frac{2}{3}}\\ \mathbf{y_2=\frac{20}{3}}\end{cases}$$

7. $\begin{cases} x^2+y^2=42 \\ x+y=4\sqrt{3} \end{cases}$

Si tratta di un sistema simmetrico:

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=42 \\ x+y=4\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=3 \\ x+y=4\sqrt{3} \end{cases} \qquad z^2-4\sqrt{3}\,z+3=0 \qquad z_{1,2}=2\sqrt{3}\pm 3$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1=2\sqrt{3}+3} \\ \boldsymbol{y_1=2\sqrt{3}-3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x_2=2\sqrt{3}-3} \\ \boldsymbol{y_2=2\sqrt{3}+3} \end{cases}$$

8. $\begin{cases} x^2+y^2-6x+y+8=0 \\ x^2+y^2+4y-1=0 \end{cases}$

Sottraggo la prima equazione dalla seconda:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4y-1=0 \\ 6x+3y-9=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x+3 \\ x^2+(-2x+3)^2+4\,(-2x+3)-1=0 \end{cases}$$

$$x^2+4x^2-12x+9-8x+12-1=0 \qquad 5x^2-20\,x+20=0 \qquad (x-2)^2=0 \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$$

9. Data l'equazione $x^2-6x+k-2=0$, determina il valore di k affinchè, dette x_1 e x_2 le sue radici, si abbia:

A. x_1 e x_2 reali e distinte

Perché le soluzioni siano reali e distinte, il discriminante dell'equazione deve essere maggiore di zero:

$$\frac{\Delta}{4}=9-k+2>0 \qquad \boldsymbol{k<11}$$

B. $x_1x_2=-16$

$$\frac{c}{a}=-16 \qquad k-2=-16 \qquad \boldsymbol{k=-14}$$

C. $x_1x_2=x_1+x_2$

$$\frac{c}{a}=-\frac{b}{a} \qquad c=-b \qquad k-2=+6 \qquad \boldsymbol{k=8}$$

D. $x_1^2+x_2^2=20$

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=20 \qquad \left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}=20 \qquad 36-2(k-2)=20 \qquad 36-2k+4=20 \qquad \boldsymbol{k=10}$$

E. $x_1^3+x_2^3=126$

$$(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2=126 \qquad (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=126 \qquad \left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=126$$

$$216-18\,(k-2)=126 \qquad 12-(k-2)=7 \qquad k-2=5 \qquad \boldsymbol{k=7}$$

10. Trova l'età di una persona sapendo che fra due anni la sua età sarà uguale al quadrato della quarta parte dell'età che aveva tre anni fa.

Indico l'età della persona con x:

$$x+2=\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 \qquad 16x+32=x^2-6x+9 \qquad x^2-22x-23=0 \qquad x_{1,2}=11\pm12$$

Trattandosi di una soluzione positiva, l'età della persona è **23 anni**.

11. Un pentagono è formato da un quadrato e da un triangolo isoscele avente per base un lato del quadrato. L'altezza del triangolo è $\frac{6}{5}$ del lato di base e l'area del pentagono è di $640\ cm^2$. Trova il perimetro del pentagono.

L'area del pentagono si calcola sommando le due aree, quella del quadrato e quella del triangolo. Indico con x il lato del quadrato, perciò l'altezza del triangolo è $\frac{6}{5}x$:

$$x^2+\frac{1}{2}x\cdot\frac{6}{5}x=640 \qquad \frac{8}{5}x^2=640 \qquad x^2=80\cdot5 \qquad x=20$$

La base del quadrato ha lunghezza 20 cm, mentre l'altezza del triangolo è 24 cm. Posso determinare il lato del triangolo usando il teorema di Pitagora:

$$l=\sqrt{(10\ cm)^2+(24\ cm)^2}=26\ cm$$

Posso quindi determinare il perimetro:

$$2p=26\ cm\cdot2+20\ cm\cdot3=\mathbf{112\ cm}$$

12. In un numero di due cifre la differenza delle cifre è 3 e la differenza dei quadrati delle cifre aumentata di 1 è uguale al loro prodotto. Trova il numero.

Il numero di due cifre è $N=10\,x+y$, quindi le due cifre sono x e y:

$$\begin{cases}x-y=3\\x^2-y^2+1=xy\end{cases} \qquad \begin{cases}x=y+3\\y^2+6y+9-y^2+1=y^2+3y\end{cases} \qquad y^2-3y-10=0$$

$$y_{1,2}=\frac{3\pm7}{2}=\left\langle\begin{matrix}5\\ [-2]\end{matrix}\right. \qquad \mathbf{N_1=85} \qquad \mathbf{N_2=58}$$

13. In un trapezio rettangolo la base minore è congruente all'altezza, che è di 12 cm; il lato obliquo è di 20 cm. Determina perimetro e area del trapezio. Dal vertice comune alla base minore e all'altezza si conduca la parallela al lato obliquo: si determini l'area delle due parti in cui resta diviso il trapezio.

Conoscendo il lato obliquo e l'altezza, posso determinare la differenza tra la base maggiore e la base minore, applicando il teorema di Pitagora:

$$B-b=\sqrt{(20\ cm)^2-(12\ cm)^2}=16\ cm$$

Perciò la base maggiore misura 28 cm, la base minore 12 cm, l'altezza 12 cm e il lato obliquo 20 cm.
Posso determinare perimetro e area:

$$2p=28\ cm+12\ cm+12\ cm+20\ cm=\mathbf{72\ cm}$$

$$A=\frac{(28\ cm+12\ cm)\cdot12\ cm}{2}=\mathbf{240\ cm^2}$$

Se traccio la parallela al lato obliquo, trovo innanzi tutto un triangolo rettangolo di cateti 12 cm e 16 cm, oltre a un parallelogrammo di base 12 cm e altezza 12 cm:

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot12\ cm\cdot16\ cm=\mathbf{96\ cm^2} \qquad A_2=240\ cm^2-96\ cm^2=\mathbf{144\ cm^2}$$

14. Determina l'area e il perimetro di un trapezio rettangolo la cui altezza è i $\frac{14}{5}$ della base minore ed è $\frac{4}{5}$ del lato obliquo che è lungo 70 m.

Il lato obliquo è 70 m, perciò posso determinare l'altezza del trapezio:

$$h = \frac{4}{5} \cdot 70\ m = 56\ m$$

L'altezza è i $\frac{14}{5}$ della base minore, perciò posso determinare la base minore:

$$h = \frac{14}{5} b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{5}{14} h = 20\ m$$

Conoscendo il lato obliquo e l'altezza, posso determinare la differenza tra la base maggiore e la base minore, applicando il teorema di Pitagora:

$$B - b = \sqrt{(70\ m)^2 - (56\ m)^2} = 7\ m\ \sqrt{10^2 - 8^2} = 42\ m$$

Perciò la base maggiore misura 62 m, la base minore 20 m, l'altezza 56 m e il lato obliquo 70 m.
Posso determinare perimetro e area:

$$2p = 62\ m + 20\ m + 56\ m + 70\ m = \mathbf{208\ m}$$

$$A = \frac{(62\ m + 20\ m) \cdot 56\ m}{2} = \mathbf{2296\ m^2}$$