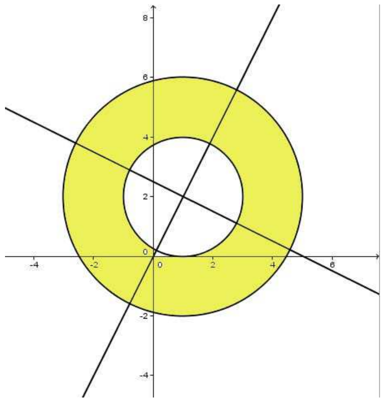
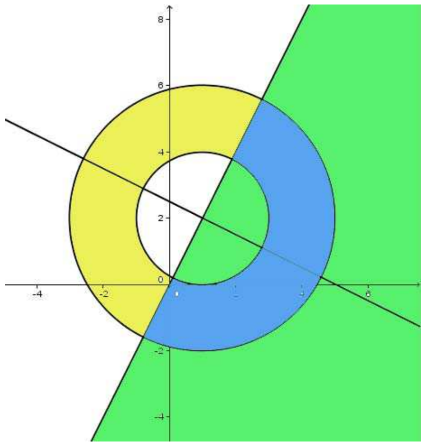
1. Rappresenta graficamente il seguente sistema: $\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+1\geq 0 \\ x^2+y^2-2x-4y-11\leq 0 \\ 2x-y\geq 0 \\ x+2y-5\geq 0 \end{cases}$ e calcola l'area.

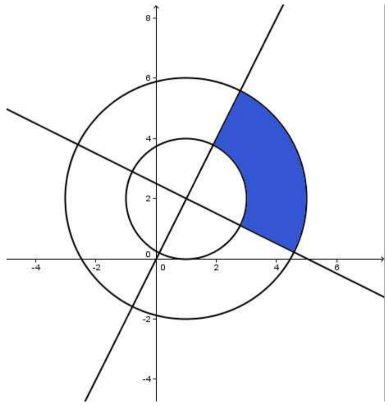


Intersecando le prime due equazioni otteniamo la corona circolare, ovvero la parte di piano compresa tra le due circonferenze concentriche di centro (1; 2): la prima di raggio 2 e la seconda di raggio 4.



La terza equazione è una retta passante per l'origine e per il centro delle circonferenze. La parte in cui è soddisfatta la terza disequazione è indicata in verde, in azzurro quella intersecata con la corona circolare.

Per concludere, con l'ultima disequazione, ottengo la parte indicata nell'ultima figura:

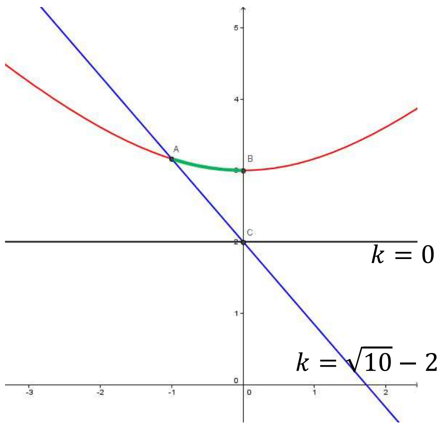


La parte indicata dal sistema è un quarto della corona circolare compresa tra le due circonferenze, perciò ha area:

$$A=\frac{16\pi-4\pi}{4}=\mathbf{3\pi}$$

2. Risolvi: $\begin{cases} \sqrt{9+x^2}+kx-2=0 \\ -1\leq x\leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=\sqrt{9+x^2} \\ y=-kx+2 \\ -1\leq x\leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-y^2=-9 \\ y=-kx+2 \\ -1\leq x\leq 0 \quad \wedge \quad y\geq 0 \end{cases}$$



Si tratta di un'iperbole – precisamente solo il ramo superiore dell'iperbole – con i fuochi sull'asse y e di un fascio proprio di rette di centro (0; 2).

Ho identificato il tratto di iperbole evidenziato in verde tra i punti A e B.

A ha ascissa – 1 e, per determinarne l'ordinata, sostituisco l'ascissa nell'equazione dell'iperbole, perciò: $A\left(-1;\ \sqrt{10}\right)$. Il punto B, invece, ha ascissa 0 e quindi ordinata 3.
Impongo il passaggio del fascio per i due punti dati:

$$A\left(-1;\ \sqrt{10}\right):\sqrt{10}=k+2 \quad\Rightarrow\quad k=\sqrt{10}-2$$

Imponendo il passaggio del fascio per B, non ottengo nessun valore di k, visto che l'asse y è una delle generatrici del fascio, quella che non ottengo per nessun valore di k.

Concludendo quindi:

$$\mathbf{1\ soluzione\ per\ k\geq\sqrt{10}-2}$$

3. Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione: $kx^2+(2k-1)y^2-2x+2\sqrt{2}y-3=0$ rappresenta: a) una circonferenza; b) una parabola con asse parallelo agli assi coordinati; c) un'iperbole; d) un'ellisse.

A. Perché l'equazione rappresenti una circonferenza, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere uguali:

$$k=2k-1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k=1}$$

B. Perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse y, il coefficiente del termine di secondo grado in y deve essere nullo; perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse x, il coefficiente del termine di secondo grado in x deve essere nullo, perciò:

$$\boldsymbol{k=0} \quad \vee \quad \boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$$

C. Perché l'equazione rappresenti un'iperbole, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere discordi:

$$k\,(2k-1)<0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{0<k<\frac{1}{2}}$$

D. Perché l'equazione rappresenti un'ellisse, i coefficienti dei termini di secondo grado e il coefficiente s devono essere concordi. Cominciamo con il determinare l'equazione canonica dell'ellisse, con il completamento del quadrato:

$$k\left(x^2-\frac{2}{k}x+\frac{1}{k^2}\right)+(2k-1)\left(y^2+\frac{2\sqrt{2}}{2k-1}y+\frac{2}{(2k-1)^2}\right)=3+\frac{1}{k}+\frac{2}{2k-1}$$

Ora abbiamo il coefficiente s che è il secondo membro dell'equazione:

$$\begin{cases} k>0 \\ 2k-1>0 \\ 3+\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{2k-1}\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ 2k-1<0 \\ 3+\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{2k-1}\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k>0 \\ k>\dfrac{1}{2} \\ 6k^2-3k+2k-1+2k\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ k<\dfrac{1}{2} \\ 6k^2-3k+2k-1+2k\leq 0 \end{cases}$$

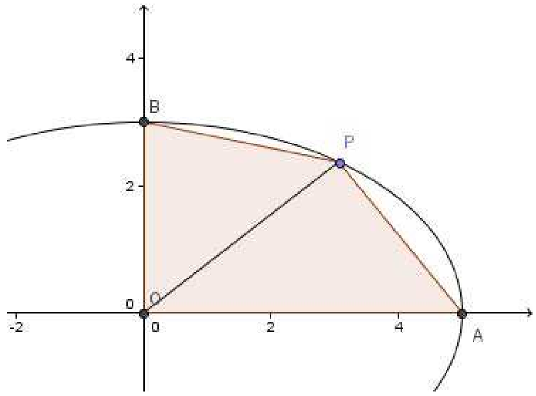
$$\begin{cases} k>0 \\ k>\dfrac{1}{2} \\ 6k^2+k-1\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ k<\dfrac{1}{2} \\ 6k^2+k-1\leq 0 \end{cases}$$

$$k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}$$

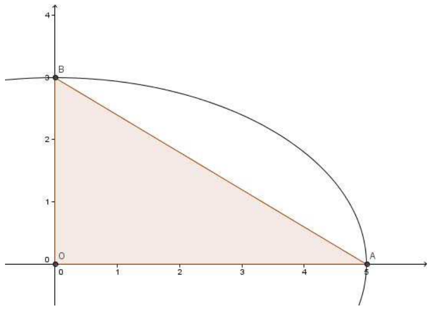
$$\begin{cases} k>0 \\ k>\dfrac{1}{2} \\ k\leq -\dfrac{1}{2} \quad \vee \quad k\geq \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ k<\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}\leq k\leq \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{k>\frac{1}{2}} \quad \vee \quad \boldsymbol{-\frac{1}{2}\leq k<0}$$

4. Data l'ellisse di equazione $9x^2 + 25y^2 = 225$, detti A e B i vertici dell'ellisse rispettivamente di ascissa e ordinata positiva, determina sull'arco AB dell'ellisse situato nel primo quadrante un punto P tale che il quadrilatero OAPB abbia area uguale a $4k$ ($k \in \mathbb{R}^+$).



Rappresento l'ellisse indicata.
Prendo un punto P qualsiasi sull'ellisse. Collego i punti per formare il quadrilatero OAPB. Il punto P ha coordinate generiche $P(x; y)$, entrambe positive. Vediamo come si comporta il problema nelle limitazioni:



Valutiamo i due casi limite:

$$P \equiv A: x = 5, y = 0: A_{OAPB} = A_{OAB} = \frac{15}{2} = 4k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{15}{8} \quad acc.$$

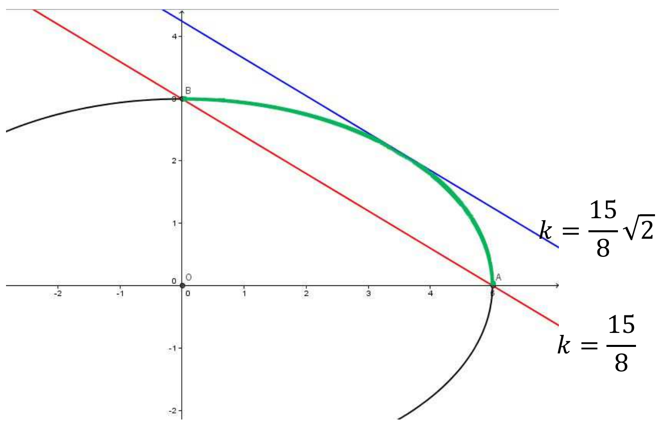
$$P \equiv B: x = 0, y = 3: A_{OAPB} = A_{OAB} = \frac{15}{2} = 4k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{15}{8} \quad acc.$$

Determiniamo l'equazione generica, considerando il quadrilatero OAPB scomposto nei due triangoli OAP e OPB.

$$A_{OAPB} = A_{OAP} + A_{OPB} = \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}x = 4k$$

Perciò il sistema è:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8k \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ k > 0 \\ 0 \le x \le 5 \ \wedge \ 0 \le y \le 3 \end{cases}$$



Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e B:

$A(5; 0)$: $\quad 15 = 8k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{15}{8}$

$B(0; 3)$: $\quad 15 = 8k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{15}{8}$

In altre parole, ho due soluzioni per il valore $k = \frac{15}{8}$

Determino il valore del parametro per la retta tangente:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8k \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3}k - \dfrac{5}{3}y \\ 9\left(\dfrac{8}{3}k - \dfrac{5}{3}y\right)^2 + 25y^2 = 225 \end{cases} \Rightarrow 64k^2 + 25y^2 - 80ky + 25y^2 = 225$$

$$50y^2 - 80ky + 64k^2 - 225 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 1600\,k^2 - 50\,(64k^2 - 225) = 0$$

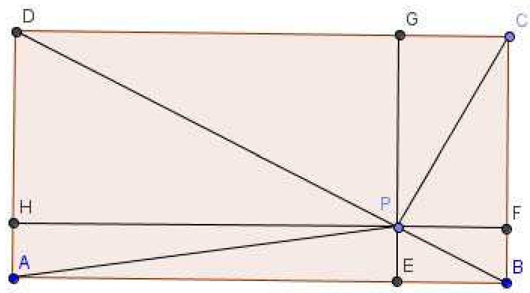
$$32\,k^2 - (64k^2 - 225) = 0 \quad \Rightarrow \quad 32\,k^2 = 225 \quad \Rightarrow \quad k = \pm\frac{15}{8}\sqrt{2}$$

Devo scegliere il valore positivo del parametro, considerato che i valori vanno crescendo spostandosi verso l'alto: infatti, il valore di k = 0 corrisponde alla retta passante per l'origine.

Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{due\ soluzioni\ per\ \frac{15}{8} \le k \le \frac{15}{8}\sqrt{2}}$$

5. Dato il rettangolo ABCD di lati $\overline{AB} = \overline{CD} = 2$ e $\overline{BC} = \overline{AD} = 1$, determina sulla diagonale BD un punto P in modo che sia k la somma dei quadrati delle distanze di P dai quattro vertici del rettangolo.



Consideriamo il rettangolo ABCD dato in figura.

Sulla diagonale BD, preso il punto P, consideriamo le perpendicolari tracciate per P ai lati del rettangolo AB e BC, sui quali vengono intercettati – rispettivamente – i punti E e F. Indichiamo con x il segmento PE. Siccome il triangolo EBP è simile al triangolo ABD e siccome questo secondo triangolo è stato costruito in modo che i due cateti siano uno doppio dell'altro, allora PF verrà indicato con 2x. CF sarà indicato con 1 – x e AE con 2 – 2x.

Procediamo prima con i casi limite:

$$P \equiv D \text{ cioè } x = 1: \quad PD^2 = 0;\ PC^2 = 4;\ PB^2 = 5;\ PA^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = 10 \quad acc.$$

$$P \equiv B \text{ cioè } x = 0: \quad PD^2 = 5;\ PC^2 = 1;\ PB^2 = 0;\ PA^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad k = 10 \quad acc.$$

Perciò: $0 \le x \le 1$

Costruiamo la relazione, applicando il teorema di Pitagora:

triangolo EBP per determinare PB: $PB^2 = PE^2 + EB^2 = x^2 + (2x)^2 = 5x^2$

triangolo EBA per determinare PA: $PA^2 = AE^2 + EP^2 = (2-2x)^2 + x^2 = 5x^2 - 8x + 4$

triangolo HPD per determinare PD: $PD^2 = PH^2 + HD^2 = (2-2x)^2 + (1-x)^2 = 5x^2 - 10x + 5$

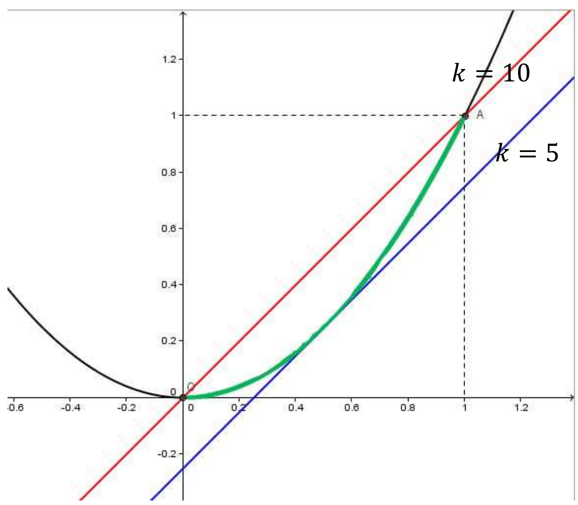
triangolo FCP per determinare PC: $PC^2 = PF^2 + CF^2 = (2x)^2 + (1-x)^2 = 5x^2 - 2x + 1$

E quindi la relazione è:

$$20x^2 - 20x + 10 = k \qquad (1)$$

Il sistema è, applicando il metodo della parabola fissa:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 20y - 20x + 10 = k \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e O:

$$A(1;1): \quad 20 - 20 + 10 = k \quad \Longrightarrow \quad k = 10$$

$$O(0;0): \quad 10 = k \quad \Longrightarrow \quad k = 10$$

In altre parole, ho due soluzioni per il valore $k = 10$

Determino il valore del parametro per la retta tangente, usando la relazione (1) che corrisponde alla risolvente:

$$20x^2 - 20x + 10 - k = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 100 - 20\,(10-k) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5 - 10 + k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 5$$

Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{due\ soluzioni\ per 5 \le k \le 10}$$