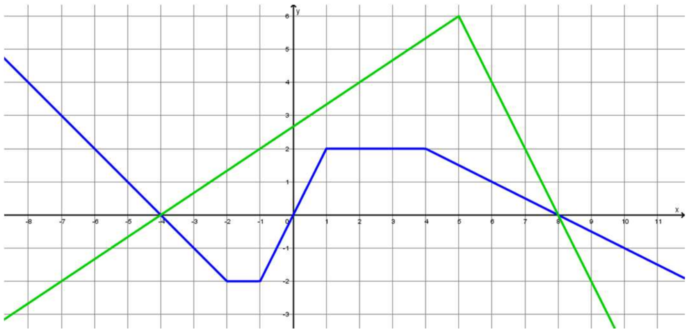
1. Dopo aver rappresentato le seguenti funzioni, stabilisci in quali intervalli $f(x) < g(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} -x-4 & se\ x \le -2 \\ -2 & se -2 < x \le -1 \\ 2x & se -1 < x \le 1 \\ 2 & se\ 1 < x \le 4 \\ -1/2\ x+4 & se\ x > 4 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} & se\ x \le 5 \\ -2x+16 & se\ x > 5 \end{cases}$$



$$\boldsymbol{-4 < x < 8}$$

2. Determina la distanza dell'origine dalla retta che passa per i punti $A\ (-1;3)$ e $B\ (5;1)$.

Determino innanzi tutto l'equazione della retta passante per i due punti:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} \qquad \frac{y-3}{1-3} = \frac{x+1}{5+1} \qquad -3y+9 = x+1 \qquad x+3y-8=0$$

A questo punto calcolo la distanza dell'origine dalla retta: $d(O;AB) = \frac{|ax_O+by_O+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|0+0-8|}{\sqrt{1+3^2}} = \boldsymbol{\frac{4}{5}\sqrt{10}}$

3. Determina il parametro $a \in \mathbb{R}$ in modo che le rette di equazioni

$$(a-1)\,x+y-a+2=0 \qquad ax+(2a-1)\,y+2=0$$

si intersechino in un punto di ascissa 1.

Sostituendo in entrambe l'ascissa 1, ricavo l'ordinata dalla prima retta e la sostituisco nella seconda, in modo da ricavare il parametro:

$$\begin{cases} a-1+y-a+2=0 \\ a+(2a-1)\,y+2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-1 \\ a-2a+1+2=0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{a=3}$$

4. Un segmento AB ha per estremi i punti $A\ (2;1)$ e $B\ (5;\ -4)$. Determina le coordinate di un punto P appartenente al segmento AB in modo che $PB \cong 3\ AP$.

Per risolvere il problema posso determinare le coordinate del punto medio M del segmento AB e poi le coordinate del punto medio P del segmento AM:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \qquad P\left(\frac{x_M+x_A}{2}; \frac{y_M+y_A}{2}\right) = \left(\boldsymbol{\frac{11}{4}}; -\boldsymbol{\frac{1}{4}}\right)$$

Oppure considero le proiezioni P' e P" del punto P rispettivamente sull'asse x e sull'asse y.
Per il teorema di Talete, considerate le parallele AA', PP' e BB' tagliate dall'asse x, abbiamo:

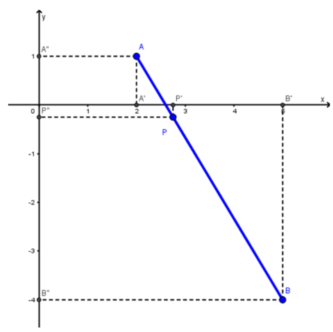
$$\overline{AP}:\overline{PB} = \overline{A'P'}:\overline{P'B'}$$

Perciò: $\overline{B'P'} = 3\overline{P'A'} \quad \Rightarrow \quad 5-x = 3\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad x = \boldsymbol{\frac{11}{4}}$

Analogamente se consideriamo le parallele AA", PP" e BB" tagliate dall'asse y:

$$\overline{B"P"} = 3\overline{P"A"} \quad \Rightarrow \quad y+4 = 3\,(1-y) \quad \Rightarrow \quad y = -\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

Il punto richiesto P ha coordinate: $P\left(\frac{11}{4}; -\frac{1}{4}\right)$



5. Considera il punto $A\ (3;4)$ e la retta r di equazione $y=\frac{1}{3}x$. Dopo aver verificato che il punto A non appartiene a r, scrivi l'equazione della retta OA. Successivamente, determina, rispettivamente sulla retta OA e su r due punti P e Q aventi la stessa ordinata, in modo che sia $\overline{PQ}=18$.

Per verificare la non appartenenza del punto A alla retta r, sostituendo le coordinate di A nell'equazione della retta non otterrò un'identità e infatti: $4\neq\frac{1}{3}\cdot 1$.

Determino l'equazione della retta OA: $y=\frac{y_A}{x_A}x$ $\quad y=\frac{4}{3}x$

I due punti P e Q avranno coordinate: $P\ \left(\frac{3}{4}k;k\right)$ $\quad Q(3k;k)$ avendo fatto in modo di determinare i due punti con la stessa ordinata.

Pongo la distanza tra i due punti uguale a 18:

$$|x_Q-x_P|=18 \qquad \left|3k-\frac{3}{4}k\right|=18 \qquad \left|\frac{1}{4}k\right|=2 \qquad |k|=8 \qquad k=\pm 8$$

Le coordinate dei punti richiesti sono:

$$\boldsymbol{P_1\ (6;8)} \qquad \boldsymbol{Q_1(24;8)} \qquad \qquad \boldsymbol{P_2\ (-6;-8)} \qquad \boldsymbol{Q_2(-24;-8)}$$

6. Dato il fascio di equazione $(k-2)\ x+2ky+k-1=0$, con $k\in\mathbb{R}$, dopo aver stabilito di che tipo di fascio si tratta e averne determinato il centro nel caso sia un fascio proprio, determina k in modo che:
A. la retta passi per il punto $(1;2)$;
B. la retta sia parallela agli assi;
C. la retta formi un angolo di 135° con l'asse x;
D. la retta formi con l'asse x un angolo acuto.

Riscrivo l'equazione del fascio, evidenziando le equazioni delle due generatrici:

$$-2x-1+k\ (x+2y+1)=0$$

Le due generatrici sono una retta qualsiasi (che non otterrò per nessun valore del parametro) e una retta parallela all'asse delle ordinate, perciò si tratta di un fascio proprio. Posso determinarne il centro:

$$\begin{cases}-2x-1=0\\ x+2y+1=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

A. Per determinare il valore del parametro per la retta che passa per il punto dato, sostituisco le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$k-2+4k+k-1=0 \qquad \boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$$

B. Per determinare il valore del parametro per la retta parallela all'asse delle ascisse, pongo il coefficiente della x uguale a zero: $\boldsymbol{k=2}$

Per determinare il valore del parametro per la retta parallela all'asse delle ordinate, pongo il coefficiente della y uguale a zero: $\boldsymbol{k=0}$

C. La retta che forma un angolo di 135° con l'asse x è parallela alla bisettrice di secondo e quarto quadrante, perciò ha coefficiente angolare -1:

$$\frac{2-k}{2k}=-1 \qquad 2-k=-2k \qquad \boldsymbol{k=-2}$$

D. Perché la retta formi con l'asse x un angolo acuto, il coefficiente angolare deve essere positivo:

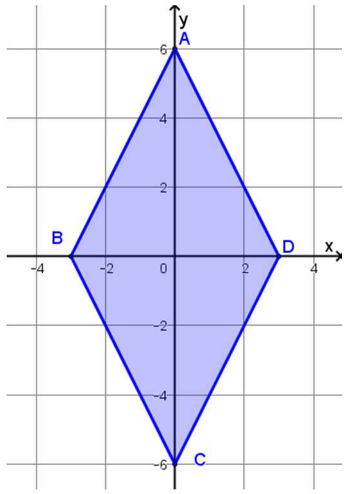
$$\frac{2-k}{2k}>0 \qquad \begin{matrix}N>0:\ k<2\\ D>0:\ k>0\end{matrix} \qquad \boldsymbol{0<k<2}$$

7. Rappresenta il poligono racchiuso dalla disequazione $2\,|x| + |y| \leq 6$ e calcolane l'area.

Se considero l'equazione associata, essa rappresenta quattro segmenti:

$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0; y \geq 0 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0; y < 0 \\ -2x - y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0; y < 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$



Il quadrilatero rappresentato è un rombo, visto che ha le coppie di lati opposti paralleli e tutti e quattro i lati sono congruenti. Dato che le due diagonali sono adagiate sugli assi e sono congruenti, ne determino la lunghezza e, da esse, l'area:

$$A(0;6) \;\; C(0;\,-6) \qquad \overline{AC} = 12$$
$$B(-3;0) \;\; D(3;\;0) \qquad \overline{BD} = 6$$

Posso quindi determinare l'area:

$$Area = \frac{1}{2}\,\overline{AC}\cdot\overline{BD} = \mathbf{36}$$

8. Dato il triangolo di vertici $A\,(2;0)$, $B(10;4)$ e $C(0;8)$, verifica che il baricentro (ovvero il punto di incontro delle mediane), il circocentro (ovvero il punto di incontro degli assi dei lati) e l'ortocentro (ovvero il punto di incontro delle altezze) sono allineati. (La retta in questione è nota come retta di Eulero).

Determino innanzi tutto le coordinate del baricentro G:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = (4;4)$$

Determino le equazioni di due degli assi e, intersecandoli, determino le coordinate del circocentro D. Determino le equazioni degli assi dei lati AC e BC:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-0)^2 = (x-0)^2 + (y-8)^2 \\ (x-10)^2 + (y-4)^2 = (x-0)^2 + (y-8)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 4y - 15 = 0 \\ -5x + 2y + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{cases} -x + 4y - 15 = 0 \\ 10x - 4y - 26 = 0 \end{cases} \\ \hline 9x - 41 = 0 \end{array} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{41}{9} \\ y = \dfrac{44}{9} \end{cases} \qquad D\left(\frac{41}{9};\frac{44}{9}\right)$$

Determino le equazioni di due altezze: l'altezza uscente da B sul lato AC, che ha coefficiente angolare $\frac{1}{4}$ come il primo asse e l'altezza uscente da A sul lato BC, che ha coefficiente angolare $\frac{5}{2}$ come il secondo asse. Dall'intersezione delle due altezze determino il punto H, ovvero l'ortocentro:

$$\begin{cases} y - 4 = \dfrac{1}{4}(x-10) \\ y = \dfrac{5}{2}(x-2) \end{cases} \qquad \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} + 4 = \frac{5}{2}x - 5 \qquad \frac{9}{4}x = \frac{13}{2} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{26}{9} \\ y = \dfrac{20}{9} \end{cases} \qquad H\left(\frac{26}{9};\frac{20}{9}\right)$$

Ora verifico che i tre punti siano allineati, usando la condizione di allineamento di tre punti:

$$\frac{x_G - x_D}{x_H - x_D} = \frac{y_G - y_D}{y_H - y_D} \qquad \frac{4 - \frac{41}{9}}{\frac{26}{9} - \frac{41}{9}} = \frac{4 - \frac{44}{9}}{\frac{20}{9} - \frac{44}{9}} \qquad \frac{36-41}{26-41} = \frac{36-44}{20-44} \qquad -\frac{5}{-15} = -\frac{8}{-24} \qquad \boldsymbol{c.v.d.}$$