1. Una cassa di $1{,}00 \cdot 10^2\ kg$ viene spinta su un pavimento da una forza $\vec{F}$ a $30°$ rispetto al pavimento. Il coefficiente di attrito dinamico tra la cassa e il pavimento è $0{,}200$. È noto che il lavoro totale compiuto da $\vec{F}$ e dalla forza di attrito è nullo. Calcola il modulo di $\vec{F}$.

$$m = 1{,}00 \cdot 10^2\ kg \qquad \alpha = 30° \qquad \mu = 0{,}200 \qquad W + W_a = 0\ J \qquad F?$$

Il lavoro compiuto dalla forza che spinge la cassa sul pavimento, indicato con W, è dato da:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos 30°$$

Il lavoro compiuto dalla forza di attrito, indicato con W_a, è dato da:

$$W_a = \overrightarrow{F_a} \cdot \vec{s} = F_a s \cos 180° = -F_a s$$

Per determinare la forza di attrito, data dalla forza premente moltiplicata per il coefficiente di attrito, devo tenere presente che la forza premente è data dalla forza peso alla quale si somma la componente perpendicolare al pavimento della forza $\vec{F}$, che è diretta verso il basso, visto che la cassa viene spinta, perciò:

$$F_a = (P + F \sin 30°)\, \mu = (mg + F \sin 30°)\, \mu$$

A questo punto, visto che il lavoro totale compiuto dalla forza $\vec{F}$ e dalla forza d'attrito è nullo, posso calcolare il modulo di $\vec{F}$:

$$Fs \cos 30° - (mg + F \sin 30°)\, \mu s = 0 \qquad F \cos 30° - mg\mu - F\mu \sin 30° = 0$$

$$F\ (\cos 30° - \mu \sin 30°) = mg\mu \qquad F = \frac{mg\mu}{\cos 30° - \mu \sin 30°} = \mathbf{256\ N}$$

2. Una sonda spaziale di massa $5{,}0 \cdot 10^4\ kg$ viaggia alla velocità di $11\ 000\ m/s$. Per farla rallentare vengono accesi i retrorazzi che le imprimono per $2500\ km$ una spinta di $4{,}0 \cdot 10^5\ N$ in verso contrario a quello dello spostamento. Calcola la velocità finale della sonda.

$$m = 5{,}0 \cdot 10^4\ kg \qquad v_1 = 11\ 000\ m/s \qquad s = 2\ 500\ km \qquad F = 4{,}0 \cdot 10^5\ N \qquad v_2?$$

Il lavoro è dato, per definizione, dal prodotto scalare di forza per spostamento, ma, per il teorema dell'energia cinetica, è dato anche dalla variazione di energia cinetica, perciò:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = \Delta K \qquad Fs \cos 180° = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Devo tenere presente che la forza che rallenta la sonda spaziale (quella esercitata dall'accensione dei retrorazzi) ha verso opposto allo spostamento, perciò il lavoro è negativo (e infatti la velocità diminuisce):

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2\frac{Fs}{m}} = \mathbf{9{,}0 \cdot 10^3\ m/s}$$

3. Uno slittino di $16\ kg$ viene tirato su una superficie orizzontale innevata con una forza orizzontale di modulo $24\ N$. Lo slittino parte da fermo e raggiunge una velocità di modulo $2{,}0\ m/s$ dopo $8{,}0\ m$. Calcola il coefficiente di attrito dinamico tra lo slittino e la neve.

$$m = 16\ kg \qquad F = 24\ N \qquad v_1 = 0{,}0\ m/s \qquad v_2 = 2{,}0\ m/s \qquad s = 8{,}0\ m \qquad \mu?$$

Il lavoro totale è dato dalla somma del lavoro della forza trainante (con la stessa direzione e lo stesso verso dello spostamento) e del lavoro della forza d'attrito (con la stessa direzione, ma verso opposto rispetto allo spostamento). Per il teorema dell'energia cinetica, il lavoro è dato anche dalla variazione di energia cinetica, perciò:

$$Fs - F_a s = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad Fs - mg\mu s = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\mu = \frac{2\ Fs - m v_2^2}{2mgs} = \mathbf{0{,}13}$$

4. Un blocchetto di massa $0{,}20\ kg$ sta scivolando con velocità $2{,}0\ m/s$ su un tavolo alto $0{,}80\ m$. Arriva al bordo e cade giù. Qual è la velocità del blocchetto quando tocca terra?

$$m = 0{,}20\ kg \qquad v_1 = 2{,}0\ m/s \qquad h = 0{,}80\ m \qquad v_2?$$

Per il principio di conservazione dell'energia meccanica, trattandosi di un sistema isolato, l'energia meccanica al bordo del tavolo (quando comincia il moto di caduta) è uguale all'energia meccanica quando tocca terra, ovvero:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

Scegliendo come livello zero dell'energia potenziale quello a terra e considerando che il blocchetto possiede una velocità orizzontale prima di cominciare il moto di caduta, il principio di conservazione diventa:

$$mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = \mathbf{4{,}4\ m/s}$$

5. Una forza risultante esterna è applicata a un oggetto di massa $6{,}00\ kg$ inizialmente fermo. La componente della forza risultante nella direzione dello spostamento varia al variare dello spostamento nel modo rappresentato in figura. Qual è il lavoro compiuto dalla forza risultante? Qual è la velocità dell'oggetto quando il modulo del suo spostamento è $20{,}0\ m$?

$$m = 6{,}00\ kg \qquad v_1 = 0{,}0\ m/s \qquad W? \qquad s = 20{,}0\ m \qquad v_2?$$

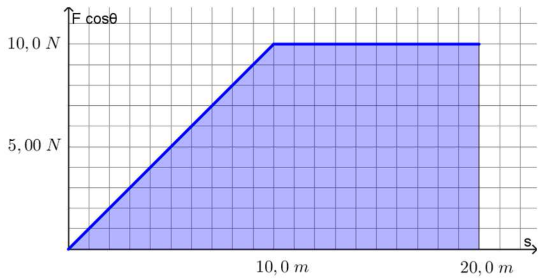
Nel grafico rappresentato in figura, il lavoro è dato dall'area sottesa dal grafico (nello specifico l'area di un trapezio rettangolo):

$$W = \frac{(20{,}0\ m + 10{,}0\ m) \cdot 10{,}0\ N}{2} = \mathbf{150\ J}$$

Il lavoro, di cui ora conosciamo il modulo, può essere calcolato anche come variazione di energia cinetica, perciò:

$$W = \Delta K \qquad W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2\frac{W}{m}} = \sqrt{2\frac{W}{m}} = \mathbf{7{,}07\ m/s}$$



6. Una molla verticale con costante elastica di $450\ N/m$ è montata su un pavimento ed è in posizione di riposo. Da un punto sopra la molla è lasciato cadere un blocco di $0{,}30\ kg$: la molla si accorcia di $2{,}5\ cm$ prima di fermarsi temporaneamente. Calcola da quale altezza, rispetto all'estremità della molla nell'istante in cui si ferma, è stato fatto cadere il blocco.

$$k = 450\ N/m \qquad m = 0{,}30\ kg \qquad x = 2{,}5\ cm \qquad h_1?$$

Ci sono due altezze diverse: l'altezza h_1, dalla quale viene lasciato cadere il blocco (da determinare) e l'altezza h_2, per comodità pari a zero, che è quella a cui arriva la molla al termine della compressione, nel momento in cui è temporaneamente ferma.
In corrispondenza della prima altezza, abbiamo l'energia potenziale gravitazionale del blocco che sta per cadere, ma nessun'altra forma di energia. In corrispondenza della seconda altezza, abbiamo l'energia potenziale elastica della molla, mentre l'energia potenziale gravitazionale è nulla (è il livello zero che abbiamo scelto arbitrariamente) e l'energia cinetica è nulla, in quanto la molla si ferma temporaneamente. Per il principio di conservazione dell'energia meccanica abbiamo quindi:

$$U_{g1} = U_{e2} \qquad mgh_1 = \frac{1}{2}kx^2 \qquad h_1 = \frac{kx^2}{2mg} = \mathbf{0{,}048\ m}$$

7. La corda di un'altalena può sopportare una tensione massima di $8{,}00 \cdot 10^2\ N$ senza rompersi. Nella situazione iniziale l'altalena è ferma in posizione verticale, poi viene tirata indietro in modo da formare un angolo di $60{,}0°$ con la direzione verticale. Qual è la massa della persona più pesante che può usare questa altalena?

$$T = 8{,}00 \cdot 10^2\ N \qquad v_1 = 0\ m/s \qquad \alpha = 60{,}0° \qquad m?$$

Considero come punto di partenza quello in cui l'altalena è stata tirata indietro in modo da formare un angolo di 60,0° con la direzione verticale, ovvero a un'altezza pari a metà della lunghezza della corda (perché l'altezza è la lunghezza della corda moltiplicata per il coseno dell'angolo formato con la direzione verticale e il coseno di 60,0° vale ½). A questa altezza ho solo un'energia potenziale gravitazionale, visto che l'altalena viene lasciata cadere. Quando torna in posizione verticale, l'altalena ha acquisito una certa velocità e quindi possiederà anche un'energia cinetica. Per quanto riguarda l'energia potenziale gravitazionale, invece, possiamo considerarla nulla e quindi ad altezza nulla.
Per il principio di conservazione dell'energia meccanica, abbiamo:

$$U_1 = K_2 \qquad mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad v_2 = \sqrt{gl}$$

Nel punto più basso, ci sono tre forze che agiscono: la tensione della fune, rivolta verso l'alto, la forza peso, rivolta verso il basso e la forza centripeta (dovuta alla rotazione dell'altalena) e rivolta verso l'alto (visto che il centro della circonferenza descritta dall'altalena è in alto). Perciò:

$$T - P = F_c \qquad T - mg = m\frac{v_2^2}{l}$$

Da non dimenticare che il valore della forza centripeta è dato da: $F_c = m\frac{v^2}{r}$ e in questo caso il raggio della circonferenza coincide con la lunghezza della corda.
Sostituendo il valore della velocità ed esplicitando la tensione, otteniamo:

$$T = mg + m\frac{gl}{l} = mg + mg = 2mg$$

Da questa relazione possiamo a questo punto ottenere la massa:

$$m = \frac{T}{2g} = \mathbf{40{,}8\ kg}$$