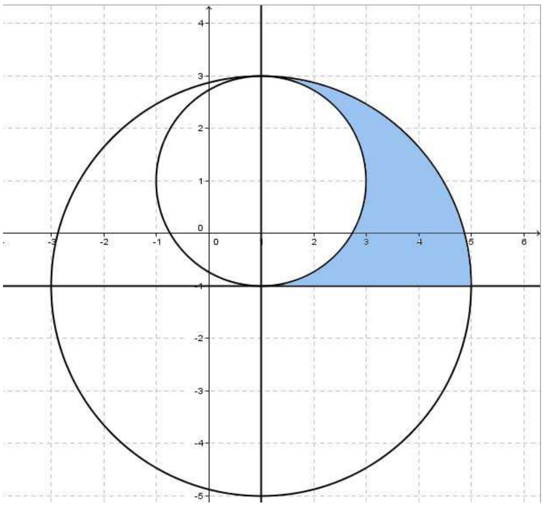
1. Rappresenta graficamente il seguente sistema: $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-2\geq 0 \\ x^2+y^2-2x+2y-14\leq 0 \\ x\geq 1 \\ y\geq -1 \end{cases}$ e calcola l'area.



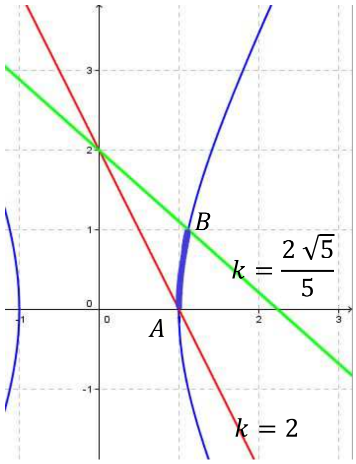
Intersecando le prime due equazioni otteniamo la parte di piano compresa tra le due circonferenze.
La terza equazione e la quarta equazione rappresentano rette perpendicolari e parallele agli assi, passanti per il centro della circonferenza più grande, e la parte individuata è il primo quadrante.

Otteniamo quindi la parte indicata in figura:

La parte indicata dal sistema è un quarto dell'are della circonferenza più grande cui è sottratta metà dell'area della circonferenza più piccola:

$$A=\frac{16\pi}{4}-\frac{4\pi}{2}=\mathbf{2\pi}$$

2. Risolvi: $\begin{cases} \sqrt{-4+4x^2}+kx-2=0 \\ 0\leq y\leq 1\ \wedge x\geq 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} y=\sqrt{-4+4x^2} \\ y=-kx+2 \\ 0\leq y\leq 1\ \wedge x\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2-y^2=4 \\ y=-kx+2 \\ 0\leq y\leq 1\ \wedge x\geq 0 \end{cases}$$

Si tratta di un'iperbole – precisamente solo il ramo dell'iperbole situato nel primo quadrante – con i fuochi sull'asse x e di un fascio proprio di rette di centro (0; 2).

Ho identificato il tratto di iperbole evidenziato in verde tra i punti A e B.

A è uno dei vertici e ha coordinate (1; 0). Il punto B, invece, ha ordinata 1 e quindi ascissa $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Impongo il passaggio del fascio per i due punti dati:

$$A\,(1;\ 0):0=-k+2 \quad\Longrightarrow\quad k=2$$

$$B\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\ 1\right):1=-k\frac{\sqrt{5}}{2}+2 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Concludendo quindi:

$$\mathbf{1\ soluzione\ per\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\leq k\leq 2}$$

3. Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione: $(2k-1)x^2+ky^2-2\sqrt{2}x+2y-3=0$ rappresenta: a) una circonferenza; b) una parabola con asse parallelo agli assi coordinati; c) un'iperbole; d) un'ellisse.

A. Perché l'equazione rappresenti una circonferenza, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere uguali:

$$k=2k-1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k=1}$$

B. Perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse y, il coefficiente del termine di secondo grado in y deve essere nullo; perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse x, il coefficiente del termine di secondo grado in x deve essere nullo, perciò:

$$\boldsymbol{k=0} \quad \vee \quad \boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$$

C. Perché l'equazione rappresenti un'iperbole, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere discordi:

$$k\,(2k-1)<0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{0}<k<\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

D. Perché l'equazione rappresenti un'ellisse, i coefficienti dei termini di secondo grado e il coefficiente s devono essere concordi. Cominciamo con il determinare l'equazione canonica dell'ellisse, con il completamento del quadrato:

$$(2k-1)\left(x^2-\frac{2\sqrt{2}}{2k-1}x+\frac{2}{(2k-1)^2}\right)+k\left(y^2+\frac{2}{k}y+\frac{1}{k^2}\right)=3+\frac{1}{k}+\frac{2}{2k-1}$$

Ora abbiamo il coefficiente s che è il secondo membro dell'equazione:

$$\begin{cases} k>0 \\ 2k-1>0 \\ 3+\frac{1}{k}+\frac{2}{2k-1}\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ 2k-1<0 \\ 3+\frac{1}{k}+\frac{2}{2k-1}\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k>0 \\ k>\frac{1}{2} \\ 6k^2-3k+2k-1+2k\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ k<\frac{1}{2} \\ 6k^2-3k+2k-1+2k\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k>0 \\ k>\frac{1}{2} \\ 6k^2+k-1\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ k<\frac{1}{2} \\ 6k^2+k-1\leq 0 \end{cases}$$

$$k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}$$

$$\begin{cases} k>0 \\ k>\frac{1}{2} \\ k\leq-\frac{1}{2} \quad \vee \quad k\geq\frac{1}{3} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ k<\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{1}{3} \end{cases}$$

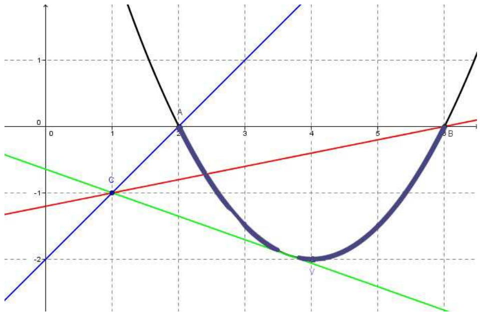
$$\boldsymbol{k>\frac{1}{2}} \quad \vee \quad \boldsymbol{-\frac{1}{2}\leq k<0}$$

4. Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$, sull'arco di parabola contenuto nel 4° quadrante, determina un punto P in modo che sia: $(k-1)\overline{PT} + \overline{PS} = k \quad (k \in \mathbb{R})$, essendo $\overline{PS}$ e $\overline{PT}$ rispettivamente le distanze di P dagli assi y e x.

Dato che PT è la distanza di P dall'asse x, il suo valore è – y, essendo P un punto del quarto quadrante. Dato che PS è la distanza di P dall'asse y, il suo valore è x.
Perciò, l'equazione del fascio di rette è:

$$x + y(1-k) = k$$

Si tratta di un fascio proprio di centro C (1; – 1).



Valutiamo i due casi limite:

$$P \equiv A: x = 2, y = 0: 2 = k \quad acc.$$
$$P \equiv B: x = 6, y = 0: 6 = k \quad acc.$$

Perciò il sistema è:

$$\begin{cases} x + y(1-k) = k \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \\ 2 \le x \le 6 \ \wedge \ -2 \le y \le 0 \end{cases}$$

Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e B:

$$A(2;0): \quad k = 2$$
$$B(6;0): \quad k = 6$$

Determino il valore del parametro per la retta tangente:

$$\begin{cases} x + y(1-k) = k \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \end{cases} \Rightarrow \quad x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6\right)(1-k) = k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2(k-1) + x\,(3-4k) + 7k - 6 = 0$$

$$\Delta = (3-4k)^2 - 2\,(k-1)(7k-6) = 0$$

$$9 - 24k + 16k^2 - 14k^2 + 12k + 14k - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,k^2 + 2k - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

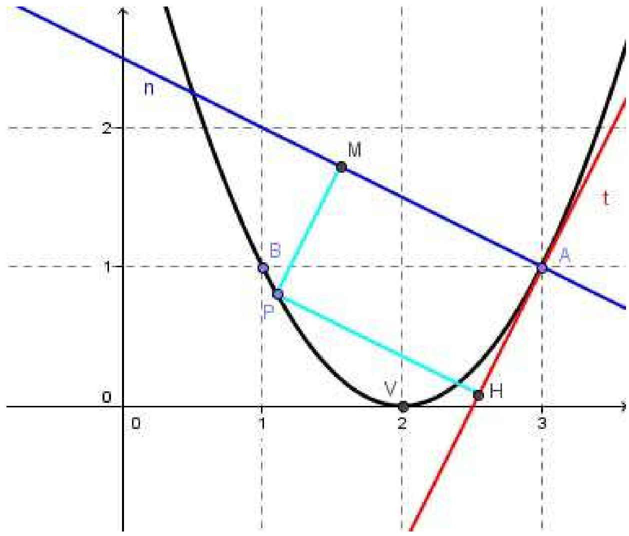
Devo scegliere il valore negativo del parametro, considerato che la retta parallela all'asse x è quella che non si ottiene per nessun valore del parametro.

Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{una\ soluzione\ per \quad 2 \le k < 6}$$

$$\boldsymbol{due\ soluzioni\ per \quad k \le \frac{-1-\sqrt{7}}{2} \ \vee \ k \ge 6}$$

5. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 4$, determina l'equazione della retta *t* tangente in A (3; 1) alla parabola e l'equazione della retta *n* perpendicolare a *t* e passante per A. Considera poi un punto P sull'arco di parabola BVA (con B punto della parabola con ordinata uguale ad A e V vertice della parabola) in modo che risulti $\overline{PM} + k\overline{PH} = \sqrt{5}$ $(k \in \mathbb{R})$, essendo $\overline{PH}$ e $\overline{PM}$ rispettivamente le distanze di P da *t* e da *n*.



Determiniamo innanzi tutto le equazioni delle due rette n e t.

Per determinare l'equazione di t, uso la regola dello sdoppiamento:

$$\frac{y+1}{2} = 3x - 4\frac{x+3}{2} + 4 \quad \Longrightarrow \quad 2x - y - 5 = 0$$

Della retta n, conosco il coefficiente angolare (che è l'antireciproco di quello di t) e so che passa per A, perciò:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-3) \quad \Longrightarrow \quad x + 2y - 5 = 0$$

Procediamo prima con i casi limite:

$$P \equiv A \text{ cioè } x = 3 \text{ e } y = 1: \quad PM = 0 \text{ e } PH = 0$$

$$\Longrightarrow \quad k \text{ non esiste non acc.}$$

$$P \equiv B \text{ cioè } x = 1 \text{ e } y = 1: \quad PM = \frac{|1+2-5|}{\sqrt{5}} \text{ e}$$

$$PH = \frac{|2-1-5|}{\sqrt{5}} \quad \Longrightarrow \quad 2 + 4k = 5 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{3}{4} \quad acc.$$

Perciò: $1 \le x < 3 \quad \wedge \quad 0 \le y \le 1$

Costruiamo la relazione, usando la distanza punto/retta e considerando il fatto che, per entrambe le rette, il punto P si trova nel semipiano negativo, perciò togliendo il valore assoluto devo cambiare segno a tutti i termini:

$$-x - 2y + 5 + k(-2x + y + 5) = 5$$

Il sistema è:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ x\,(2k+1) + y\,(2-k) - 5k = 0 \\ 1 \le x < 3 \quad \wedge \quad 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Il fascio che ho ottenuto ha centro C (2; – 1), sulla retta t e la retta t è proprio la retta che non ottengo per nessun valore di k. Perciò non ha senso sostituire il punto A nella soluzione.

Impongo il passaggio del fascio per il punto limite B:

$$B(1;1): \quad 2k + 1 + 2 - k - 5k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{3}{4}$$

Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{una\ soluzione\ per\ \ k \ge \frac{3}{4}}$$