1. Scrivi le equazioni della trasformazione t che si ottiene componendo la rotazione di equazioni:

$$r_1: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{cases}$$

con la rotazione di angolo 30° r_2, avente lo stesso centro. Verifica poi che l'immagine della retta $y = 2x - 1$ tramite t è una retta ad essa perpendicolare.

Determino il centro della rotazione, unico punto unito della trasformazione:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = 0 \\ x\sqrt{3} - y + 1 - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} x\sqrt{3} + 3y - 2\sqrt{3} - 3 = 0 \\ -x\sqrt{3} + y - 1 + 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \\ \hline \quad 4y - 4 = 0 \end{array} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Dalle equazioni della trasformazione posso ricavare: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ e $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, perciò la rotazione r_1 è una rotazione di centro $C(2; 1)$ di angolo $\alpha = 60°$. Componendo la rotazione r_1 $(C; 60°)$ con la rotazione r_2 $(C; 30°)$, si ottiene una trasformazione che è una rotazione con lo stesso centro delle due date e di angolo $60° + 30° = 90°$, perciò:

$$t = r_1 \circ r_2 = r\ (C; 90°): \begin{cases} x' = (x-2)\cdot 0 - (y-1)\cdot 1 + 2 \\ y' = (x-2)\cdot 1 + (y-1)\cdot 0 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x' = -y + 3} \\ \boldsymbol{y' = x - 1} \end{cases}$$

Con una rotazione di 90°, la retta non può che essere trasformata in una retta perpendicolare; lo verifico:

$$t^{-1}: \begin{cases} x = y' + 1 \\ y = -x' + 3 \end{cases} \qquad -x + 3 = 2(y+1) - 1 \qquad y = -\frac{1}{2}x + 1$$

La retta ottenuta ha coefficiente angolare che è l'antireciproco di quella data, perciò ho verificato che la retta data è perpendicolare alla sua immagine.

2. Data l'iperbole $4x^2 - 9y^2 - 24x - 18y - 9 = 0$, determina le coordinate dei suoi fuochi, le equazioni degli asintoti e la sua eccentricità.

Scrivo l'equazione dell'iperbole in forma normale, completando i quadrati:

$$4(x^2 - 6x + 9) - 9(y^2 + 2y + 1) = 9 + 36 - 9 \qquad \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Si tratta di un'iperbole traslata secondo un vettore $\vec{v}\ (3;\ -1)$, di centro $C'(3;\ -1)$. Per procedere più speditamente nei calcoli, posso considerare l'iperbole con centro nell'origine, determinarne fuochi, asintoti ed eccentricità e poi traslare di nuovo:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} \qquad F_{1,2}(\pm\sqrt{13}; 0) \qquad y = \pm\frac{b}{a}x \qquad y = \pm\frac{2}{3}x \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

Quindi i fuochi hanno coordinate: $\boldsymbol{F'_{1,2}\left(3 \pm \sqrt{13};\ -1\right)}$, l'eccentricità è ancora $\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{3}}$ e gli asintoti sono paralleli a quelli determinati, ma passanti per il centro $C'(3;\ -1)$:

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 3) \qquad \boldsymbol{y = \frac{2}{3}x - 3} \qquad\qquad y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 3) \qquad \boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x + 1}$$

3. Date le simmetrie assiali s_r con $r: y = 3x + 5$ e s_s con $s: x + 3y - 25 = 0$, determina l'equazione della trasformazione $t = s_r \circ s_s$. Determina l'immagine della circonferenza di centro $C(3;\ 4)$ e raggio 2 rispetto a t.

La composizione di due simmetrie assiali con assi non paralleli è una rotazione con centro P (dove P è il punto di intersezione delle due rette) e angolo doppio rispetto a quello formato dalle due rette. Le due rette sono perpendicolari, $m_r = 3$ e $m_s = -\frac{1}{3}$, perciò la rotazione che si ottiene ha angolo 180°, e coincide, quindi, con la simmetria centrale di centro P. Determino, quindi, le coordinate di P e, successivamente, le equazioni della simmetria:

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ x + 3y - 25 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 9x + 15 - 25 = 0 \\ y = 3x + 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases} \qquad P(1;8) \qquad t = s_r \circ s_s: \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 16 - y \end{cases}$$

Trattandosi di una isometria, posso trasformare il centro della circonferenza ottenendo l'immagine C' e poi determino la circonferenza di centro C' e raggio 2: $C(3;4) \longrightarrow C'(-1;12)$
La circonferenza ha equazione:

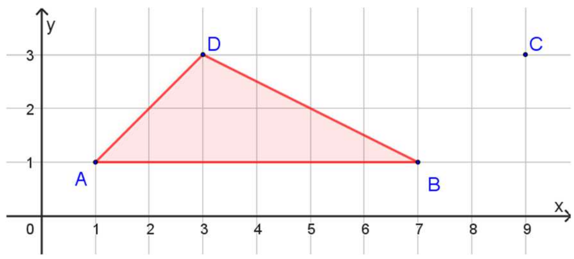
$$(x+1)^2 + (y-12)^2 = 2^2 \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x - 24y + 141 = 0}$$

4. Se al triangolo ABD di vertici $A(1;\ 1)$, $B(7;\ 1)$ e $D(3;\ 3)$, si applica la similitudine di generiche equazioni:

$$\sigma: \begin{cases} x' = 4\left(\frac{3}{7} - a\right)x + 3\left(a - \frac{3}{7}\right)y + a \\ y' = 3\left(\frac{3}{7} - a\right)x + 4\left(\frac{3}{7} - a\right)y - \frac{11}{5} - a \end{cases} \qquad con\ a < \frac{3}{7}$$

si ottiene un triangolo $A'B'D'$ di area 24. Determina il vertice C' in modo che il quadrilatero $A'B'C'D'$ sia un parallelogramma.

Determino l'area del triangolo ABD, rappresentato a lato:



$$\overline{AB} = |7-1| = 6 \qquad h = d(D;AB) = \frac{|3-1|}{\sqrt{1}} = 2$$

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h = 6$$

L'area del triangolo trasformato è 4 volte l'area del triangolo di partenza, perciò la similitudine data ha rapporto $k = \sqrt{4} = 2$, ma ricordando che nell'equazione generica della similitudine:

$$\sigma: \begin{cases} x' = ax - by + c_1 \\ y' = bx + ay + c_2 \end{cases} \qquad k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Perciò:

$$16\left(\frac{3}{7} - a\right)^2 + 9\left(\frac{3}{7} - a\right)^2 = 4 \qquad \left(\frac{3}{7} - a\right)^2 = \frac{4}{25} \qquad \frac{3}{7} - a = \frac{2}{5}\ \left(visto\ che\ a < \frac{3}{7}\right) \qquad a = \frac{1}{35}$$

L'equazione della similitudine è:

$$\sigma: \begin{cases} x' = \frac{4}{7}\left(3 - \frac{1}{5}\right)x + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{5} - 3\right)y + \frac{1}{35} \\ y' = \frac{3}{7}\left(3 - \frac{1}{5}\right)x + \frac{4}{7}\left(3 - \frac{1}{5}\right)y - \frac{78}{35} \end{cases} \qquad \sigma: \begin{cases} x' = \frac{8}{5}x - \frac{6}{5}y + \frac{1}{35} \\ y' = \frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{78}{35} \end{cases}$$

È più facile determinare il quarto vertice del parallelogramma nel triangolo ABD e poi trasformarlo con la similitudine: determino il coefficiente angolare di AD, determino la retta passante per B e parallela ad AD e la interseco con la retta passante per D e parallela ad AB (e quindi parallela all'asse x):

$$m_{AD} = \frac{3-1}{3-1} = 1 \qquad \begin{cases} y - 1 = 1(x - 7) \\ y = 3 \end{cases} \qquad C(9;3)$$

Trasformo il punto C, ottenendo quanto richiesto: $C'\left(\frac{8}{5}\cdot 9 - \frac{6}{5}\cdot 3 + \frac{1}{35}; \frac{6}{5}\cdot 9 + \frac{8}{5}\cdot 3 - \frac{78}{35}\right) = \boldsymbol{\left(\frac{379}{35}; \frac{468}{35}\right)}$.