1. Scegli la risposta corretta tra quelle date:

Alice ha 17 pentole fra tegami, casseruole, teglie e wok. Sapendo che il numero di tegami supera di due il numero delle casseruole, che il numero di teglie supera di tre il numero di wok e che Alice possiede almeno un wok e che il numero di wok è inferiore al numero di casseruole, qual è il numero minimo di tegami che possiede Alice? (Veterinaria 2019)

A 3 B 4 C 5 **D** 6 E 7

Indichiamo con T il numero dei tegami, C il numero delle casseruole, G il numero delle teglie e W il numero degli wok.
Sappiamo che $T + C + G + W = 17$.
Il numero di tegami supera di 2 il numero delle casseruole: $T = C + 2$. $(*)$
Il numero di teglie supera di 3 il numero di wok: $G = W + 3$. $(**)$
Alice possiede almeno un wok: $W \geq 1$ e il numero di wok è inferiore al numero di casseruole: $W < C$
La prima relazione, sostituendo $(*)$ e $(**)$ diventa: $C + 2 + C + W + 3 + W = 17 \quad \Rightarrow \quad 2C + 2W = 12 \quad \Rightarrow \quad C + W = 6$
Visto che vogliamo trovare il numero di tegami minimo, allora dovrò avere il numero di casseruole minimo e, considerando che $W < C$, il valore minimo di casseruole per cui si verifica $C + W = 6$ è 4. Quindi i tegami sono **6**.

Tre amici ricevono complessivamente 36 € da suddividere tra di loro nelle seguenti proporzioni $2 : 3 : 7$. Qual è la differenza tra l'ammontare più grande e quello più piccolo ricevuto dai tre amici? (Medicina e Odontoiatria 2014)

A 3 € B 6 € C 9 € D 12 € **E** 15 €

Indichiamo le cifre che riceveranno i tre amici con x, y e z. Le richieste del problema diventano: $\begin{cases} x + y + z = 36 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{7} \end{cases}$ e, in questo modo, la domanda a cui dobbiamo rispondere è trovare il valore di $z - x$.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ z = \frac{7}{2}x \\ x + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}x = 36 \end{cases} \qquad 6x = 36 \qquad x = 6 \qquad z - x = \frac{7}{2}x - x = \frac{5}{2}x = \mathbf{15}$$

Se: $@ + @ = § + § + §$ e $\# = @ + § + §$ quale/i delle seguenti relazioni è/sono FALSA/E? (Veterinaria 2021)
$R_1 : \# + @ = § + § + § + § + §$ $\quad R_2 : § + @ = \#$ $\quad R_3 : § + \# = @ + @ + @$

A Solo R_2 B R_2 e R_3 C Solo R_1 D R_1 e R_3 E Nessuna

Sommando membro a membro la prima e la seconda relazione otteniamo R_1, che quindi è vera:

$$@ + @ + \# = § + § + § + @ + § + § \quad \Rightarrow \quad \# + @ = § + § + § + § + §$$

Scrivendo la seconda a membri invertiti e sommando a questo punto membro a membro la prima e la seconda relazione, otteniamo R_3, che quindi è vera:

$$@ + @ + @ + § + § = § + § + § + \# \quad \Rightarrow \quad @ + @ + @ = § + \#$$

R_2 può essere vera solo nel caso in cui $§ = 0$, visto che è in contrasto con quanto affermato dalla seconda relazione data, quindi la risposta giusta è la **A**.

In un museo sono presenti soltanto quadri, sculture e mosaici. Sapendo che il numero di quadri sta a quello delle sculture come 2 sta a 3, che il numero di mosaici sta a quello dei quadri come 5 sta a 2 e che nel museo ci sono 114 sculture, qual è il numero totale di opere d'arte presenti nel museo? (Professioni sanitarie 2019)

A 380 B 475 C 455 D 570 E 323

Indicati con Q i quadri, S le sculture e M i mosaici, sapendo che ci sono 114 sculture e che il numero dei quadri sta a quello delle sculture come 2 sta a 3:

$$Q : 114 = 2 : 3 \quad \Rightarrow \quad Q = 114 \cdot \frac{2}{3} = 76$$

Sapendo che i quadri sono 76 e che il numero dei mosaici sta a quello dei quadri come 5 sta a 2:

$$M : 76 = 5 : 2 \quad \Rightarrow \quad M = 76 \cdot \frac{5}{2} = 190$$

Il totale delle opere d'arte presenti al museo è: $190 + 76 + 114 = \mathbf{380}$.

Alice ha avuto tre figli due dei quali sono gemelli. Se la somma delle età dei tre figli è di 45 anni e la differenza fra l'età del figlio maggiore e quella di uno dei figli minori (i gemelli) è 6, qual è l'età dei gemelli? (Professioni sanitarie 2020)

A 7 B 11 **C** 13 D 16 E 19

Indico l'età dei gemelli con x e con y l'età del figlio maggiore. Le condizioni del problema diventano:

$$\begin{cases} x + x + y = 45 \\ y - x = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + 6 \\ 2x + x + 6 = 45 \end{cases} \qquad 3x = 39 \qquad x = \mathbf{13}$$

In un negozio di giocattoli Alice trova dei peluche di topo Gigio di due dimensioni e quelli grandi costano il doppio di quelli piccoli. Alice decide di acquistarne cinque piccoli e tre grandi. Se, al contrario, avesse acquistato cinque peluche grandi e tre piccoli, avrebbe speso 24 € in più. Qual è il prezzo che Alice paga per un topo Gigio grande? (Med e Odontoiatria 2019)

A 6 € B 9 € C 12 € D 18 € **E** 24 €

Indicando con G i peluche grandi e con P quelli piccoli, sappiamo che $G = 2P$. Inoltre, visto che il prezzo di cinque peluche piccoli e tre grandi ($5P + 3G$) è inferiore di 24 € a quello di cinque grandi e tre piccoli ($5G + 3P$), otteniamo: $5P + 3G + 24 = 5G + 3P$, ovvero: $2G - 2P = 24$. Sostituendo G a $2P$, come dato dalla prima condizione, otteniamo:

$$2G - G = 24 \qquad G = \mathbf{24}$$

Il sistema $\begin{cases} 54\,321\, x + 12\,345\, y = 1 \\ 543\,210\, x + 123\,450\, y = 10 \end{cases}$

A è determinato, con soluzioni $x = 54\,321$ e $y = 12\,345$

B è determinato con soluzioni $x = 543\,210$ e $y = 123\,450$

C è determinato, con soluzioni $x = 10$ e $y = 10$

D è indeterminato

E è impossibile

Discutiamo il sistema:

$$\frac{54\,321}{543\,210} = \frac{12\,345}{123\,450} = \frac{1}{10}$$

Il sistema è **indeterminato**!

Il sistema $\begin{cases} kx + ky = 1 \\ kx + ky = 2 \end{cases}$

A è determinato, per $k = 1$

B è determinato, per $k = 2$

C è indeterminato, per qualsiasi valore di k

D è impossibile, solo per $k \neq 0$

E è impossibile, per qualsiasi valore di k

Discuto il sistema:

$$\frac{k}{k} = \frac{k}{k}$$

L'uguaglianza è verificata $\forall k \neq 0$ e comunque è diversa da $\frac{1}{2}$, ovvero dal rapporto tra i termini noti, quindi il sistema è impossibile.
Nel caso in cui $k = 0$:

$$0 + 0 = 1$$

nella prima equazione, perciò il sistema è **impossibile $\forall k$**.

---

2. SCEGLI UNO dei seguenti problemi e risolvilo, impostando un sistema lineare:

A. Si vuole mescolare una soluzione acida al 12% con una al 30% per ottenere 72 ml di soluzione al 20%. Quanti ml ciascuna si devono utilizzare?

Indico con x la quantità di soluzione acida al 12% e con y la quantità di soluzione acida al 30%. So che la somma delle due quantità darà 72 ml di soluzione e che mescolandole otterrò una soluzione al 20%, ovvero:

$$\begin{cases} x \cdot \frac{12}{100} + y \cdot \frac{30}{100} = 72 \cdot \frac{20}{100} \\ x + y = 72 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 5y = 240 \\ x + y = 72 \end{cases}$$

Applico il metodo di eliminazione, moltiplicando la seconda equazione per 2 e sottraendo membro a membro le due equazioni:

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 240 \\ \underline{2x + 2y = 144} \\ 3y = 96 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 72 \\ y = 32 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 40 \\ y = 32 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 40\ ml} \\ \boldsymbol{y = 32\ ml} \end{cases}$$

B. Volando controvento un aereo percorre 3000 km in 6 ore. Nel viaggio di ritorno, con lo stesso vento dell'andata, impiega 5 ore. Determina la velocità dell'aereo in assenza di vento e la velocità del vento.

Viaggiando controvento, alla velocità x dell'aereo devo sottrarre la velocità y del vento; viaggiando in favore di vento, alla velocità x dell'aereo devo sommare la velocità y del vento. Ottengo, quindi:

$$\begin{cases} x - y = \frac{3000}{6} \\ x + y = \frac{3000}{5} \end{cases} \qquad \begin{array}{r} \begin{cases} x - y = 500 \\ x + y = 600 \end{cases} \\ \hline 2x = 1100 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 550 \\ 550 + y = 600 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 550 \\ y = 50 \end{cases}$$

La velocità dell'aereo è di $\mathbf{550\ km/h}$ e la velocità del vento è di $\mathbf{50\ km/h}$.

Risolvi i seguenti sistemi lineari, discutendo quelli letterali:

3. $\begin{cases} 15x - y = -15 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$ dato che $\frac{15}{2} \neq -\frac{1}{1}$, il sistema è determinato

Applico il metodo di eliminazione, sommando membro a membro le due equazioni e ricavando x:

$$\begin{array}{r} 15x - y = -15 \\ 2x + y = -2 \\ \hline 17x = -17 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -2 + y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = -1} \\ \boldsymbol{y = 0} \end{cases}$$

4. $\begin{cases} 6x - 3y = 7 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$ dato che $\frac{6}{3} \neq \frac{-3}{-4}$, il sistema è determinato

Ricavo x dalla seconda equazione e la sostituisco nella prima:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4y+1}{3} \\ 6 \cdot \dfrac{4y+1}{3} - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4y+1}{3} \\ 8y + 2 - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4y+1}{3} \\ 5y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{5}{3}} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$$

5. $\begin{cases} 10x - 7y = 3 \\ 15x - 14y = 1 \end{cases}$ dato che $\frac{10}{15} \neq \frac{-7}{-14}$, il sistema è determinato

Applico il metodo di eliminazione, moltiplicando la prima equazione per (-2) e sommando membro a membro le due equazioni:

$$\begin{array}{r} -20x + 14y = -6 \\ 15x - 14y = 1 \\ \hline -5x = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 10 - 7y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$$

6. $\begin{cases} 6x + y = 10 \\ 8x - 3y = -4 \end{cases}$ dato che $\frac{6}{8} \neq \frac{1}{-3}$, il sistema è determinato

Applico il metodo di eliminazione, moltiplicando la prima equazione per 3 e sommando membro a membro le due equazioni:

$$\begin{array}{r} 18x + 3y = 30 \\ 8x - 3y = -4 \\ \hline 26x = 26 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 6 + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 4} \end{cases}$$

7. $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y-2} = \frac{4}{xy-2x} \\ \frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y-2} = \dfrac{4}{x(y-2)} \\ y - 2 = x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y - 2 - 2x = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -6 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad C.A.: \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

Applico il metodo di eliminazione sommando membro a membro le due equazioni:

$$\begin{array}{r} 2x - y = -6 \\ -x + y = 1 \\ \hline x = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ 5 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = -5} \\ \boldsymbol{y = -4} \end{cases} \quad \boldsymbol{acc.}$$

8. $\begin{cases} (a-2)\,x + 2y = 6 \\ (a-3)\,x + y = a - 1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a-2 & 2 \\ a-3 & 1 \end{vmatrix} = a - 2 - 2a + 6 = -(a-4)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = -2(a-4) \qquad D_y = \begin{vmatrix} a-2 & 6 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2 - 6a + 18 = a^2 - 9a + 20 = (a-4)(a-5)$$

Se $a = 4$, $D = D_x = D_y = 0$: il sistema è indeterminato **Se $a \neq 4$: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - a \end{cases}$**

9. Risolvi graficamente il sistema: $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Ricavo l'equazione esplicita per entrambe le rette:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4 \qquad\qquad y = x + 1$$

La prima retta ha ordinata all'origine pari a 4 (ovvero interseca l'asse y nel punto di ordinata 4) e ha pendenza negativa.
La seconda retta ha ordinata all'origine pari a 1 ed è parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante.
Il punto di intersezione ha coordinate $(2; 3)$, quindi la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{cases}$$