1. Risolvi graficamente il sistema: $\begin{cases} x+4y=-1 \\ -2x+3y=-9 \end{cases}$

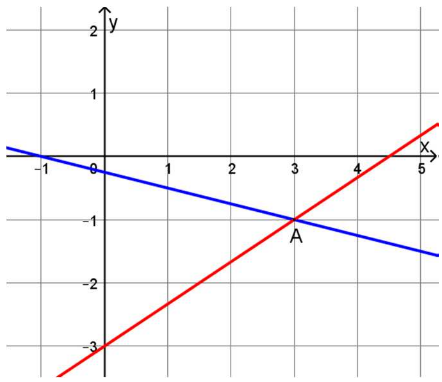
Scrivendo le equazioni delle rette in forma esplicita:

$$y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$

Ovvero con ordinata all'origine $-\frac{1}{4}$ e coefficiente angolare $-\frac{1}{4}$.
La retta è rappresentata in blu.

$$y=\frac{2}{3}x-3$$

Ovvero con ordinata all'origine -3 e coefficiente angolare $\frac{2}{3}$.
La retta è rappresentata in rosso.
Le coordinate del punto di intersezione A sono la soluzione del sistema.



$$\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$$

2. Risolvi e discuti il seguente sistema: $\begin{cases} 2x-ay=a \\ 8x-2\,y=3-2a \end{cases}$

Applico il metodo di Cramer:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -a \\ 8 & -2 \end{vmatrix}=-4+8a=4\,(2a-1)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} a & -a \\ 3-2a & -2 \end{vmatrix}=-2a+3a-2a^2=a-2a^2=-a\,(2a-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & a \\ 8 & 3-2a \end{vmatrix}=6-4a-8a=6-12\,a=-6\,(2a-1)$$

Se $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$: $\begin{cases} 2x-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2} \\ 8x-2y=2 \end{cases}$ ***sistema indeterminato***

Se $\boldsymbol{a\neq\frac{1}{2}}$: $\begin{cases} \boldsymbol{x=-\frac{a}{4}} \\ \boldsymbol{y=-\frac{3}{2}} \end{cases}$

3. Determina tre numeri interi, sapendo che il rapporto tra il primo e il triplo del terzo è uguale a $-\frac{4}{5}$, che il triplo del terzo è uguale alla differenza tra il secondo e il primo e che il primo numero supera di 4 l'opposto della somma degli altri due.

Indico i tre numeri con le incognite x, y e z:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3z}=-\dfrac{4}{5} \\ 3z=y-x \\ x=4-(y+z) \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{12}{5}z \\ y=3z-\dfrac{12}{5}z=\dfrac{3}{5}z \\ -\dfrac{12}{5}z=4-\dfrac{3}{5}z-z \quad \Rightarrow \quad z=-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x=12} \\ \boldsymbol{y=-3} \\ \boldsymbol{z=-5} \end{cases}$$

4. Dato il polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, trova a, b e c, sapendo che:
   A. $P(-1) = P(1) = -1$
   B. $\frac{1}{2}P(2) + \frac{1}{2}P(-2) = 6$

Calcolo innanzi tutto $P(-1), P(1), P(2), P(-2)$:

$$P(-1) = -1 + a - b + c \qquad P(1) = 1 + a + b + c \qquad P(2) = 8 + 4a + 2b + c \qquad P(-2) = -8 + 4a - 2b + c$$

Le condizioni date diventano, quindi, tre equazioni per determinare i tre parametri:

$$\begin{cases} -1 + a - b + c = -1 \\ 1 + a + b + c = -1 \\ 4 + 2a + b + \frac{1}{2}c - 4 + 2a - b + \frac{1}{2}c = 6 \end{cases}$$

Sottraendo la seconda dalla prima, ottengo il valore del parametro b:

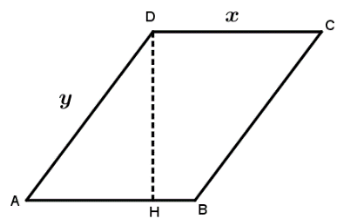
$$1 + a + b + c + 1 - a + b - c = 0 \qquad 2b = -2 \qquad b = -1$$

Usando la seconda e la terza equazione ottengo il sistema in due equazioni e due incognite:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = 6 \end{cases} \\ \hline 3a = 7 \end{array} \qquad \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ c = -\frac{10}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = \frac{7}{3}} \\ \boldsymbol{b = -1} \\ \boldsymbol{c = -\frac{10}{3}} \end{cases}$$

5. Il parallelogramma $ABCD$ ha il perimetro di $36\ cm$ e il lato AB è diviso dall'altezza DH in due segmenti tali che $AH = 3HB$. Sapendo che il lato AD supera di $1\ cm$ i $\frac{3}{2}$ di AH, calcola la lunghezza dei lati e l'area del parallelogramma.

Indico AB con l'incognita x, mentre il lato AD con l'incognita y.
Dato che $AH = 3HB$, $AH = \frac{3}{4}\ AB$, perciò $AH = \frac{3}{4}\ x$.
Le condizioni date diventano:



$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ y = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}x\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 + \frac{9}{8}x \\ x + 1 + \frac{9}{8}x = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{17}{8}x = 17 \\ y = 1 + \frac{9}{8}x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \end{cases}$$

Perciò i lati sono: $\boldsymbol{AB = 8\ cm}$ e $\boldsymbol{AD = 10\ cm}$.

Posso determinare l'altezza DH, applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHD, con cateto AH di 6 cm:

$$\overline{AD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{AH}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{DH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = 8\ cm$$

A questo punto, posso calcolare l'area del parallelogramma:

$$A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{DH} = \boldsymbol{64\ cm^2}$$

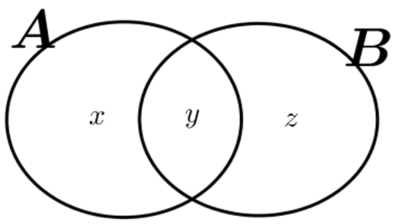
6. Trova a, b e c affinché il sistema $\begin{cases} -bx + y + z = 3 \\ 3x + ay - z = -3 \\ x - y + 4cz = -9 \end{cases}$ abbia come soluzione $(2; 2; -3)$.

Sostituisco la soluzione nel sistema e determino i parametri richiesti: $\begin{cases} -2b + 2 - 3 = 3 \\ 6 + 2a + 3 = -3 \\ 2 - 2 - 12c = -9 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = -6} \\ \boldsymbol{b = -2} \\ \boldsymbol{c = \frac{3}{4}} \end{cases}$

7. Due insiemi A e B sono tali che:
   A. $A \cup B$ contiene 32 elementi;
   B. $(A - B) \cup (B - A)$ ha 16 elementi in più di $A \cap B$;
   C. $B - A$ ha i $\frac{5}{7}$ degli elementi di $A - B$.

   Determina il numero degli elementi di A e B.

Dalla rappresentazione a lato, posso tradurre le condizioni date in termini di equazioni, dove x è il numero di elementi dell'insieme $A - B$, y è il numero di elementi dell'intersezione tra i due insiemi, z è il numero di elementi di $B - A$:



$$\begin{cases} x + y + z = 32 \\ x + z = 16 + y \\ z = \frac{5}{7}x \end{cases}$$

Sottraggo la seconda equazione dalla prima, perciò: $2y = 16 \qquad y = 8.$

Ora il sistema è di due equazioni in due incognite:

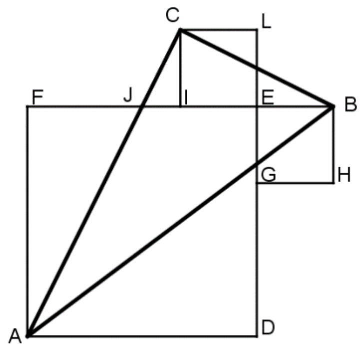
$$\begin{cases} z = \frac{5}{7}x \\ x + z = 24 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \frac{5}{7}x = 24 \\ z = \frac{5}{7}x \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{12}{7}x = 24 \\ z = \frac{5}{7}x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 14 \\ z = 10 \end{cases}$$

Possiamo concludere che **A ha 22 elementi**, mentre **B ha 18 elementi**.

8. Un quadrato più grande e due quadrati congruenti più piccoli condividono un vertice. Il quadrato più grande tocca gli altri due quadrati come indicato. Se le aree dei tre quadrati sono 180, 20 e 20, e i punti A, B e C sono i vertici dei tre quadrati (come mostrato in figura), trova l'area del triangolo ABC.

Indico con x il lato dei quadrati più piccoli e con $3x$ il lato del quadrato più grande. So che il lato del quadrato più grande è il triplo di quello più piccolo, come indicato dalle aree note:

$$(3x)^2 = 180 \qquad x^2 = 20$$



I triangoli CIJ e AJF sono simili, in quanto entrambi rettangoli e con gli angoli $A\hat{J}F$ e $I\hat{J}C$ congruenti in quanto opposti al vertice. Perciò:

$$CI : FA = JI : FJ \qquad \frac{JI}{FJ} \cong \frac{CI}{FA} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

Ma so anche che:

$$JI + FJ \cong FI \cong FE - IE = 3x - x = 2x$$

Perciò:

$$\begin{cases} JI + FJ = 2x \\ JI = \frac{1}{3}FJ \end{cases} \qquad \begin{cases} FJ = \frac{3}{2}x \\ JI = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Posso quindi determinare l'area del triangolo ABC come somma delle aree dei triangoli BCJ e ABJ:

$$A_{ABC} = A_{BCJ} + A_{ABJ} = \frac{JB \cdot CI}{2} + \frac{JB \cdot AF}{2} = \frac{JB \cdot DL}{2} = \frac{(BI + IJ) \cdot 4x}{2} = 2x\left(2x + \frac{1}{2}x\right) = 5x^2 = 5 \cdot 20 = \mathbf{100}$$

Più bella ancora la soluzione proposta da un alunno:
Il quadrato grande è costituito da 16 quadrati piccoli, perciò ha area 320. Ad essa sottraiamo le aree dei triangoli colorati e troviamo l'area del triangolo richiesto:

$$320 - 80 - 120 - 20 = \mathbf{100}$$