1. Data la funzione $f(x)=\frac{ax^2+2x+b}{cx-1}$, trova a, b e c, sapendo che $\lim_{x\to 0} f(x)=2$ e che per $x\to -1$ si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-b \qquad \lim_{x\to -1}(ax^2+2x+b)=a-2+b \qquad \lim_{x\to -1}(cx-1)=-c-1$$

Dalle condizioni date, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -b=2 \\ a-2+b=0 \\ -c-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a=4} \\ \boldsymbol{b=-2} \\ \boldsymbol{c=-1} \end{cases}$$

2. $f(x)$ è una funzione il cui grafico in un intorno di 0 è compreso tra quello della parabola di equazione $y=x^2+x-1$ e quello dell'iperbole di equazione $xy+y+1=0$. Cosa puoi dire di $\lim_{x\to 0} f(x)$?

La parabola è la funzione $h(x)=x^2+x-1$ per la quale $\lim_{x\to 0}(x^2+x-1)=-1$.

L'iperbole è la funzione $g(x)=-\frac{1}{x+1}$ per la quale $\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x+1}=-1$.

Il testo ci dà come ipotesi che $h(x)\le f(x)\le g(x)$ in un intorno di 0 e, considerati i due limiti appena calcolati, applicando il teorema del confronto, otteniamo:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x)=-1}$$

3. Dimostra che $\lim_{x\to 2}(4x-10)=-2$, trovando un $\delta>0$ tale che $|(4x-10)-(-2)|<\varepsilon$ ogniqualvolta $0<|x-2|<\delta$.

Per la definizione di limite finito in un punto:

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0:\ |(4x-10)-(-2)|<\varepsilon\ \ \forall x: 0<|x-2|<\delta$$

Risolvendo:

$$|(4x-10)-(-2)|<\varepsilon \qquad |4x-8|<\varepsilon \qquad |x-2|<\frac{\varepsilon}{4}$$

Con $\boldsymbol{\delta=\frac{\varepsilon}{4}}$, la definizione del limite è verificata.

4. Determina i valori di k che verificano i seguenti limiti:

A. $\lim_{x\to +\infty}(k+2)^{-x}=+\infty$

Perché il limite sia verificato, la base dell'esponenziale deve essere compresa tra 0 e 1:

$$0<k+2<1 \qquad \boldsymbol{-2<k<-1}$$

B. $\lim_{x\to +\infty}(x^4+1)^{k^2+2k}=0$

Perché il limite sia verificato, l'esponente deve essere negativo:

$$k^2+2k<0 \qquad \boldsymbol{-2<k<0}$$

C. $\lim_{x\to -\infty}(k^2-3)^x=0$

Perché il limite sia verificato, la base dell'esponenziale deve essere maggiore di 1:

$$k^2-3>1 \qquad \boldsymbol{k<-2 \quad \vee \quad k>2}$$

5. Calcola i seguenti limiti:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}-x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot 2^x-\log_{\frac{1}{2}}x\right)=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\tan^2 x+\frac{1}{\cos x}\right)=+\infty$

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x^4+2}=\mathbf{0}$

E. $\lim\limits_{x\to1^+}\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=+\infty$

F. $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{3x}+4)=\mathbf{4}$

G. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3+\ln x}{1-2\ln x}=\mathbf{3}$

H. $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{x+1}{x+3}=-\infty$

I. $\lim\limits_{x\to2}\cos\left(\frac{\log_2 x-1}{x+2}\right)=\mathbf{1}$

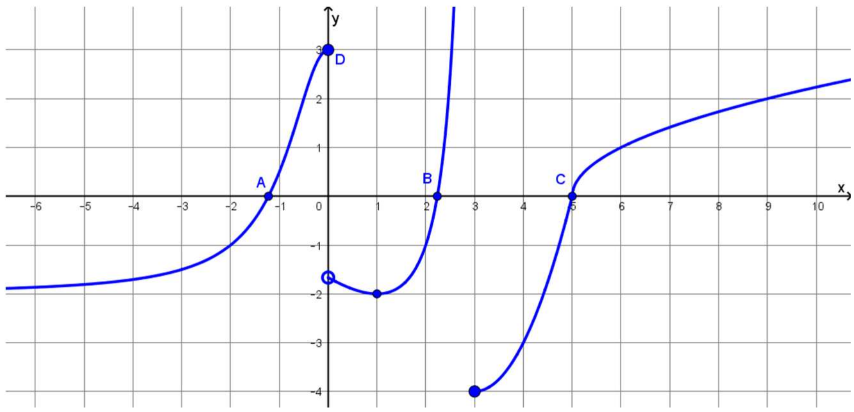
J. $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{3x}{4x-1}\right)^{\frac{1}{\ln(x-1)}}=\mathbf{0}$

6. Rappresenta graficamente una funzione $y=f(x)$ per la quale siano verificate le seguenti condizioni:

$$D=\mathbb{R} \qquad C=[-4;\ +\infty[\qquad f(3)=-4 \qquad f(1)=-2$$

Intersezioni con gli assi: $A\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};0\right),\ B\left(\sqrt{5};0\right),\ C\ (5;0),\ D\ (0;3)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-2^+ \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to0^+}f(x)=-\frac{5}{3} \qquad \lim_{x\to3^-}f(x)=+\infty$$



7. Dall'esame del grafico della funzione rappresentato in figura, deduci:

Dominio: $\mathbb{R}$

Codominio: $]-1;\ +\infty[$

Pari? La funzione **non** è pari

Dispari? La funzione **non** è dispari

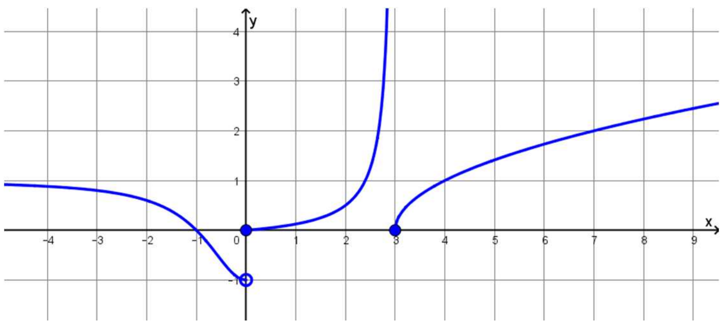
Intersezioni con gli assi: $\boldsymbol{O(0;0), A(3;0), B(-1;0)}$

$f(x)>0$: $\boldsymbol{x<-1 \quad \vee \quad x>0}$

Crescente: $\boldsymbol{0<x<3 \quad \vee \quad x>3}$

Iniettiva? **No**

Suriettiva? **Sì, nel codominio**



$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\mathbf{1}^-$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\mathbf{1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\mathbf{0}$

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\mathbf{0}$

8. Dimostra, utilizzando la definizione, che:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Utilizza le precedenti informazioni per disegnare l'andamento probabile della funzione.

$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

Applicando la definizione:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, I^-(0):\ \left|e^{\frac{1}{x}}\right| < \varepsilon, \forall x \in I^-(0), x \neq 0$$

$e^{\frac{1}{x}} < \varepsilon \qquad \frac{1}{x} < \ln\varepsilon \qquad \frac{1 - x\ln\varepsilon}{x} < 0 \qquad \begin{matrix} N > 0:\ x > \frac{1}{\ln\varepsilon} \\ D > 0:\ x > 0 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{\frac{1}{\ln\varepsilon} < x < 0}$

Il limite è verificato, perché quello determinato è un intorno sinistro di 0.

$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

Applicando la definizione:

$$\forall M > 0, \exists\, I^+(0):\ e^{\frac{1}{x}} > M, \forall x \in I^+(0), x \neq 0$$

$e^{\frac{1}{x}} > M \qquad \frac{1}{x} > \ln M \qquad \frac{1 - x\ln M}{x} > 0 \qquad \begin{matrix} N > 0:\ x < \frac{1}{\ln M} \\ D > 0:\ x > 0 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{0 < x < \frac{1}{\ln M}}$

Il limite è verificato, perché quello determinato è un intorno destro di 0.

$\lim_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

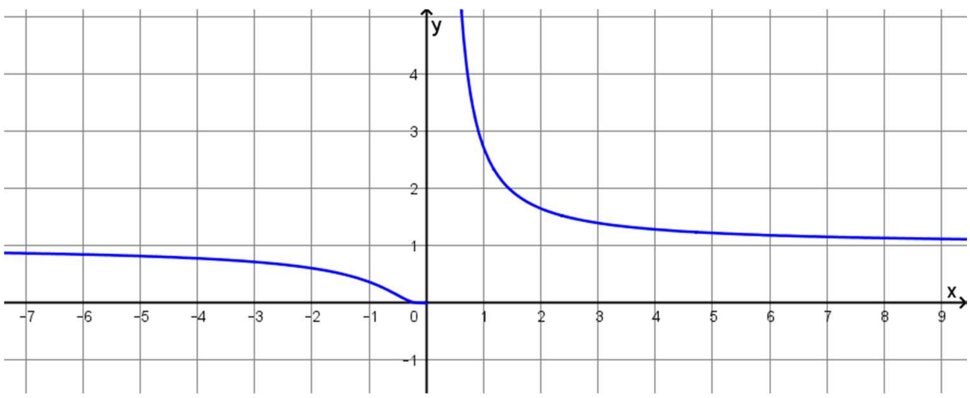
Applicando la definizione:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, c > 0:\ \left|e^{\frac{1}{x}} - 1\right| < \varepsilon, \forall x: |x| > c$$

$1 - \varepsilon < e^{\frac{1}{x}} < 1 + \varepsilon \qquad \ln(1-\varepsilon) < \frac{1}{x} < \ln(1+\varepsilon)$

$\begin{cases} \frac{1 - x\ln(1-\varepsilon)}{x} > 0 \\ \frac{1 - x\ln(1+\varepsilon)}{x} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{1}{\ln(1-\varepsilon)} \ \vee\ x > 0 \\ x < 0 \ \vee\ x > \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} \end{cases} \qquad \boldsymbol{x < \frac{1}{\ln(1-\varepsilon)} \ \vee\ x > \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}}$

Il limite è verificato, perché quello determinato è un intorno di ∞.



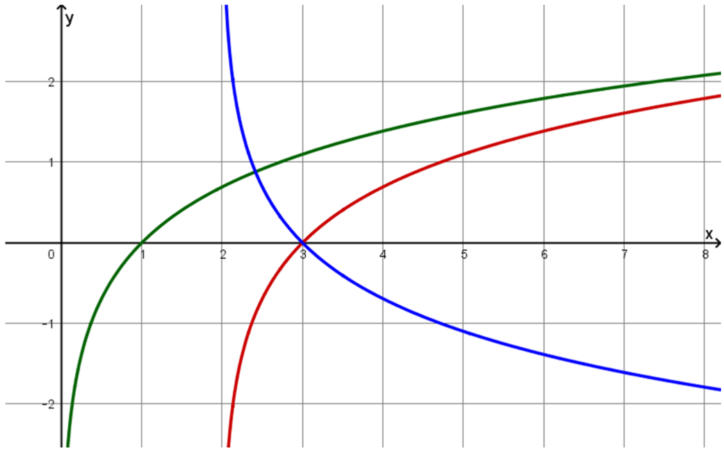
9. Rappresenta graficamente la funzione $y = -\ln\,(x-2)$, utilizzando le trasformazioni geometriche.
Dal grafico deduci i valori di $\lim_{x\to 2^+} y$ e $\lim_{x\to +\infty} y$ e verificali mediante le relative definizioni.

Rappresento prima la funzione $y = \ln x$, in verde.

Poi traslo la funzione verso destra di 2 unità, rappresentando (in rosso), la funzione

$$y = \ln(x-2)$$

Per rappresentare la funzione $y = -\ln(x-2)$, devo fare la simmetrica dell'ultima funzione rispetto all'asse x.



Dal grafico deduco:

$$\lim_{x\to 2^+} f\,(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f\,(x) = -\infty$$

Verifico i limiti:

$\lim_{x\to 2^+} f\,(x) = +\infty$

Applicando la definizione:

$$\forall M > 0, \exists\, I^+(2): -\ln(x-2) > M, \forall x \in I^+(2), x \neq 2$$

$\ln(x-2) < -M \qquad \begin{cases} x-2 < e^{-M} \\ x-2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2+e^{-M} \\ x > 2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{2 < x < 2+e^{-M}}$

Il limite è verificato, perché quello determinato è un intorno destro di 2.

$\lim_{x\to +\infty} f\,(x) = -\infty$

Applicando la definizione:

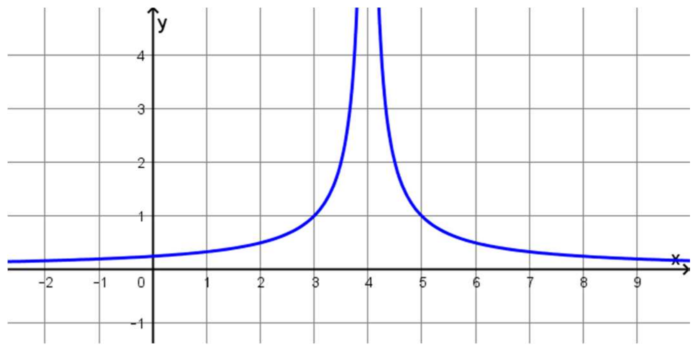
$$\forall M > 0, \exists\, c > 0: \ -\ln(x-2) < -M, \forall x: x > c$$

$\ln(x-2) > M \qquad \begin{cases} x-2 > e^{M} \\ x-2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2+e^{M} \\ x > 2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x > 2+e^{M}}$

Il limite è verificato, perché quello determinato è un intorno di $+\infty$.

10. Rappresenta graficamente la funzione $y = \left|\frac{1}{x-4}\right|$ e verifica l'esistenza di un asintoto verticale e uno orizzontale mediante le definizioni di limite. Deduci dal grafico il valore di $\lim_{x\to 2} y$ ed esegui la verifica mediante la relativa definizione.

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & se\ x > 4 \\ \dfrac{-1}{x-4} & se\ x < 4 \end{cases}$$



La funzione è data da due funzioni omografiche, che ammettono asintoto verticale $x = 4$

$$\lim_{x\to 4}\left|\frac{1}{x-4}\right| = +\infty$$

e asintoto orizzontale $y = 0$, ovvero:

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x-4}\right| = 0$$

Verifico il limite: $\lim_{x\to 4}\left|\frac{1}{x-4}\right| = +\infty$

$$\forall M > 0, \exists\, I\,(4): \left|\frac{1}{x-4}\right| > M, \forall x \in I(4), x \neq 4$$

$\left|\frac{1}{x-4}\right| > M \qquad |x-4| < \frac{1}{M} \qquad -\frac{1}{M} < x-4 < \frac{1}{M} \qquad \boldsymbol{4 - \frac{1}{M} < x < 4 + \frac{1}{M} \quad \wedge \quad x \neq 4}$

Il limite è verificato, perché quello determinato è un intorno di 4.

Verifico il limite: $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x-4}\right| = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, c > 0: \left|\frac{1}{x-4}\right| < \varepsilon, \forall x: |x| > c$$

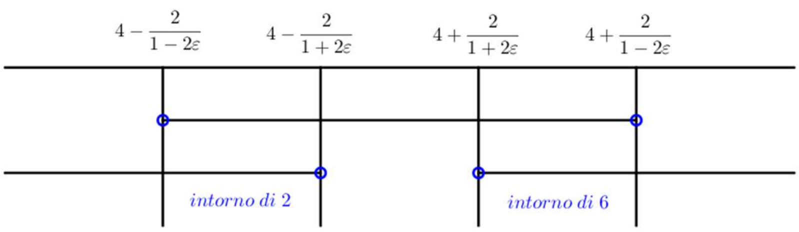
$|x-4| > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{x < 4 - \frac{1}{\varepsilon} \quad \vee \quad x > 4 + \frac{1}{\varepsilon}}$

Il limite è verificato, perché quello determinato è un intorno di ∞.

Dal grafico deduco: $\lim_{x\to 2}\left|\frac{1}{x-4}\right| = \frac{1}{2}$ e lo verifico con la definizione:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, I(2): \left|\left|\frac{1}{x-4}\right| - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \forall x \in I(2), x \neq 2$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1}{x-4}\right| < \dfrac{1}{2} + \varepsilon \\ \left|\dfrac{1}{x-4}\right| > \dfrac{1}{2} - \varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} |x-4| > \dfrac{2}{1+2\varepsilon} \\ |x-4| < \dfrac{2}{1-2\varepsilon} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 4 - \dfrac{2}{1+2\varepsilon} \quad \vee \quad x > 4 + \dfrac{2}{1+2\varepsilon} \\ 4 - \dfrac{2}{1-2\varepsilon} < x < 4 + \dfrac{2}{1-2\varepsilon} \end{cases}$$



Il limite è verificato per:

$$4 - \frac{2}{1-2\varepsilon} < x < 4 - \frac{2}{1+2\varepsilon}$$

che è un intorno di 2

11. Traduci la seguente scrittura utilizzando il linguaggio dei limiti:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0:\ \forall x\ con -2 < x < -2+\delta, \quad \frac{3+8x}{2x+4} < -M$$

A. Esegui la verifica.
B. Rappresenta il grafico della funzione evidenziando il limite precedente.
C. Deduci dal grafico i seguenti limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-2^-} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Traducendo $\forall M > 0, \exists \delta > 0:\ \forall x\ con -2 < x < -2+\delta, \quad \frac{3+8x}{2x+4} < -M$, otteniamo:

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{3+8x}{2x+4} = -\infty$$

Verifico il limite attraverso la definizione data:

$$\forall M > 0, \exists\ I^+(-2): \frac{3+8x}{2x+4} < -M, \forall x \in I^+(-2), x \neq -2$$

$$\frac{3+8x+2Mx+4M}{2x+4} < 0 \qquad \frac{(8+2M)\,x+4M+3}{x+2} < 0 \qquad \begin{matrix} N>0:\ x > \dfrac{-4M-3}{8+2M} \\ D>0:\ x>-2 \end{matrix} \qquad -2 < x < -2+\frac{13}{8+2M}$$

Il limite è verificato, perché quello determinato è un intorno destro di -2.

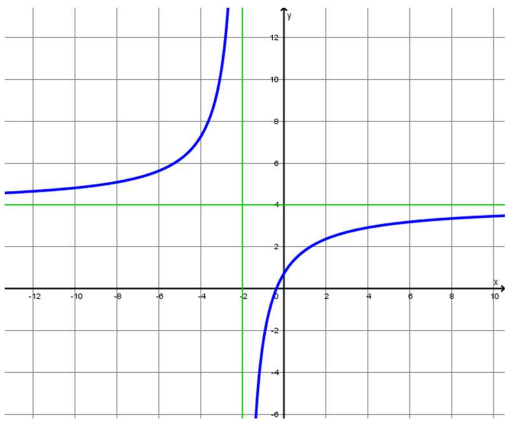
La funzione da rappresentare è una funzione omografica, di centro $O'(-2;4)$, con asintoto verticale $x=-2$ e asintoto orizzontale $y=4$.

Dal grafico deduciamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$$



12. Data la funzione: $y = \frac{1}{2\,|x|+x^2}$,
    A. trova il dominio;
    B. stabilisci se la funzione è pari o dispari;
    C. verifica che ha per estremo inferiore $L = 0$.

A. $D =]-\infty; 0[\, \cup\,]0;\, +\infty[$

B. La funzione è pari, perché: $f(-x) = f(x)$

C. Sia dato il codominio: $C = \left\{ y |\ y = \frac{1}{2|x|+x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$. Per verificare che $L = 0$ sia estremo inferiore:

- $\forall y \in C, y \geq 0$: $\frac{1}{2|x|+x^2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$
- $0 \notin C$, perché $\nexists x \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\frac{1}{2|x|+x^2} = 0$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\frac{1}{2|x|+x^2} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2|x| - \frac{1}{\varepsilon} > 0$, infatti:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 2x - \frac{1}{\varepsilon} > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x - \frac{1}{\varepsilon} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < -1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \quad \vee \quad x > -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x < 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \quad \vee \quad x > 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \end{cases}$$

$$x > -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \quad \vee \quad x < 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}}$$

13. Date le funzioni $f(x) = \log_2(1 - x)$ e $g(x) = \sqrt{x - 2}$:
    A. trova il dominio di $f(x)$, di $g(x)$, di $(f \circ g)(x)$ e di $(g \circ f)(x)$;
    B. rappresenta le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e deduci gli estremi inferiore e superiore dei loro codomini.

A. Per determinare il dominio della funzione $f(x)$, pongo l'argomento del logaritmo maggiore di 0: $\boldsymbol{D_f =]-\infty; 1[}$
Per determinare il dominio della funzione $f(x)$, pongo l'argomento della radice maggiore o uguale a 0: $\boldsymbol{D_g = [2;\, +\infty[}$
Compongo le funzioni:

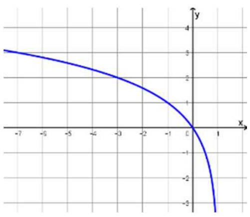
$$(f \circ g)(x) = \log_2\left(1 - \sqrt{x-2}\right) \qquad (g \circ f)(x) = \sqrt{\log_2(1-x) - 2}$$

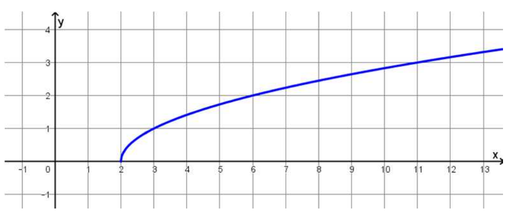
Determino il dominio:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{x-2} > 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x-2} < 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad 2 \leq x < 3 \quad \boldsymbol{D_{f \circ g} = [2; 3[}$$

$$\begin{cases} \log_2(1-x) - 2 \geq 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - x \geq 4 \\ x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -3 \\ x < 1 \end{cases} \quad x \leq -3 \quad \boldsymbol{D_{g \circ f} =]-\infty;\, -3]}$$

B. Rappresento le funzioni, la prima considerando la sua simmetrica rispetto all'asse y e poi traslandola di 1 a sinistra, lungo l'asse x; la seconda è un arco di parabola:





$\sup f(x) = +\infty \qquad \inf f(x) = -\infty$

$\sup g(x) = +\infty \qquad \inf g(x) = \min g(x) = 0$