1. Data la parabola di equazione $y = x^2 + bx + 3$, determina b in modo che la parabola abbia vertice sull'asse y.

Perché la parabola abbia vertice sull'asse y, il coefficiente del termine di primo grado deve essere nullo, perciò:

$$\boldsymbol{b = 0}$$

Infatti, l'ascissa del vertice ha valore: $-\frac{b}{2}$ e nel caso in cui il vertice sia sull'asse y, l'ascissa deve essere nulla.

2. Data la parabola di equazione $y = 2x^2 - ax + a$, determina a in modo che la parabola:
   A. sia tangente all'asse x;
   B. intersechi l'asse x in due punti distinti.

A. Perché la parabola sia tangente all'asse x, il vertice deve trovarsi sull'asse x, ovvero l'ascissa del vertice deve essere nulla:

$$-\frac{\Delta}{8} = 0 \qquad \Delta = 0 \qquad a^2 - 8a = 0 \qquad \boldsymbol{a_1 = 0} \quad \boldsymbol{a_2 = 8}$$

B. Perché la parabola intersechi l'asse x in due punti distinti, considerato che la parabola è rivolta verso l'alto, l'ordinata del vertice deve essere negativa, perciò:

$$-\frac{\Delta}{8} < 0 \qquad \Delta > 0 \qquad a^2 - 8a > 0 \qquad \boldsymbol{a < 0 \quad \lor \quad a > 8}$$

3. Determina per quale valore di k la parabola di equazione $y = -x^2 + 2\,(k+2)\,x - 5k - 7$:
   A. passa per il punto $P\ (1; 2)$;
   B. ha asse di simmetria $x = 2$;
   C. ha il vertice di ordinata -1.

A. Impongo il passaggio della parabola per il punto P, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della parabola per determinare il parametro:

$$2 = -1 + 2k + 4 - 5k - 7 \qquad 3k = -6 \qquad \boldsymbol{k = -2}$$

B. L'asse di simmetria ha generica equazione: $x = -\frac{b}{2a}$, perciò:

$$\frac{-2\,(k+2)}{-2} = 2 \qquad k + 2 = 2 \qquad \boldsymbol{k = 0}$$

C. La generica ordinata del vertice è $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$, perciò:

$$\frac{-4\,(k+2)^2 + 4\,(5k+7)}{-4} = -1 \qquad k^2 + 4k + 4 - 5k - 7 = -1 \qquad k^2 - k - 2 = 0 \qquad \boldsymbol{k_1 = -1} \quad \boldsymbol{k_2 = 2}$$

4. Scrivi l'equazione della parabola avente fuoco $F\left(1;\ -\frac{3}{2}\right)$ e vertice $V\ (1;\ -2)$.

Il vertice è il punto medio tra il fuoco e il punto della direttrice di ascissa 1, perciò:

$$y_V = \frac{y_F + y_D}{2} \qquad y_D = 2y_V - y_F = -\frac{5}{2}$$

Avendo quindi la direttrice equazione $y = -\frac{5}{2}$, posso determinare l'equazione della parabola usando la definizione di parabola come luogo geometrico, dato che la parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice:

$$\sqrt{(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{5}{2}\right| \qquad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = y^2 + 5y + \frac{25}{4} \qquad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}}$$