1. Martina va in biblioteca a prendere dei libri in prestito e, subito dopo, in libreria a fare alcuni acquisti. Torna a casa con 13 libri, ma decide di restituire subito metà dei libri presi in prestito e di regalare quattro dei libri acquistati. Sapendo che, in questo modo, le resta un numero di libri pari a quelli che aveva preso in biblioteca, se, in media, un libro costa 18,00 €, quanto ha speso in totale?

Indico con x i libri presi in prestito in biblioteca e con y i libri acquistati. Visto che torna a casa con 13 libri, so che $x+y=13$. Restituendone la metà, di quelli presi in biblioteca ne restano $\frac{x}{2}$, mentre di quelli acquistati, regalandone 4, ne restano $y-4$ e la seconda equazione è $\frac{x}{2}+y-4=x$. Posso risolvere il sistema, anche se mi serve solo il valore di y, cioè il numero dei libri acquistati:

$$\begin{cases} x+y=13 \\ \frac{x}{2}+y-4=x \end{cases} \qquad \begin{array}{c} -\begin{cases} x+y=13 \\ x-2y=-8 \end{cases} \\ \hline 3y=21 \end{array} \qquad y=7$$

La spesa per i libri ammonta a: $7\cdot 18{,}00\ € = \mathbf{126{,}00\ €}$.

2. Un rettangolo e un quadrato hanno la stessa area. Sapendo che il perimetro del rettangolo è 130 cm e che la somma tra metà dell'altezza e un terzo della base è pari alla differenza tra base e altezza, determina il perimetro del quadrato.

Indico con x la base e con y l'altezza del rettangolo. Il perimetro è $2(x+y)$, mentre la seconda informazione dice che $\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x=x-y$. Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 2\,(x+y)=130 \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x=x-y \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=65 \\ 4x-9y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{9}{4}y \\ \frac{9}{4}y+y=65 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=45 \\ y=20 \end{cases}$$

Dall'area del rettangolo (data dal prodotto tra base e altezza), posso determinare l'area del quadrato, quindi il suo lato e da lì il perimetro:

$$A=L^2=xy=45\cdot 20\ cm^2=3^2\cdot 5\cdot 2^2\cdot 5\ cm^2=(2\cdot 3\cdot 5\ cm)^2 \quad\Rightarrow\quad L=2\cdot 3\cdot 5\ cm=30\ cm$$

Il perimetro del quadrato è dato da: $4\cdot 30\ cm = \mathbf{120\ cm}$.

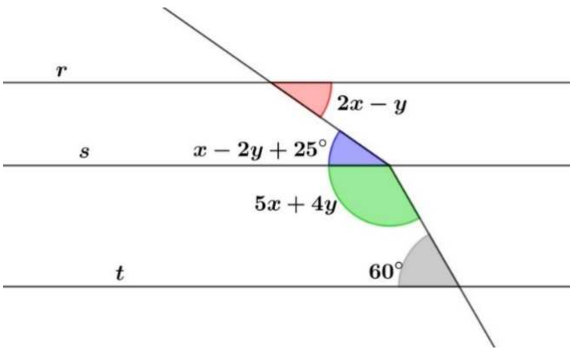
3. Una stessa prova d'esame è stata proposta in due classi diverse. In una delle due classi, i compiti sufficienti sono stati i 2/3; nell'altra classe, invece, i compiti sufficienti sono stati i 3/4. In tutto, i compiti sufficienti sono stati 32 e quelli insufficienti sono stati 13. Da quanti studenti sono formate le due classi?

Indico con x gli alunni della prima classe e con y gli alunni della seconda classe. Il sistema è:

$$\begin{array}{c} \begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y=32 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=13 \end{cases} \\ \hline x+y=45 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{r} -1 \\ 4 \end{array}\begin{cases} x+y=45 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=13 \end{cases} \\ \hline \frac{1}{3}x=7 \end{array} \qquad \begin{cases} x=21 \\ y=24 \end{cases}$$

Gli alunni sono **21** per la prima classe e **24** per la seconda.

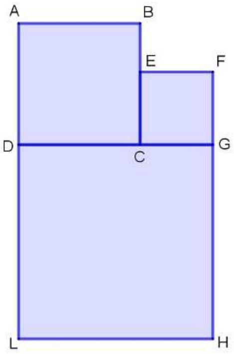
4. Le tre rette r, s, t in figura 1 sono parallele. Le ampiezze, in gradi, di tre dei quattro angoli rappresentati sono espresse in funzione di due incognite x e y. Determina x e y.



$2x-y=x-2y+25$, perché angoli alterni interni in rette parallele tagliate da una trasversale.
$5x+4y+60=180$, perché angoli coniugati in rette parallele tagliate da una trasversale.
Posso risolvere il sistema:

$$\begin{array}{c} -4\begin{cases} x+y=25 \\ 5x+4y=120 \end{cases} \\ \hline x=20 \end{array} \qquad \begin{cases} \mathbf{x=20} \\ \mathbf{y=5} \end{cases}$$

5. Osserva la figura 2 composta da tre quadrati. Il perimetro dell'esagono ABEFHL misura $84\ cm$ e il perimetro dell'esagono ABEFGD misura $52\ cm$. Calcola l'area di ABEFHL.



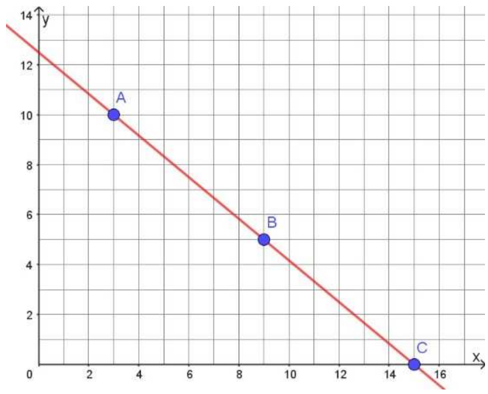
Indicati con x il lato del quadrato ABCD e con y il lato del quadrato GDLH, il perimetro dell'esagono ABEFHL diventa: $4y + 2x$, dato che $AB + EF \cong LH$ e $BE + FG \cong AD$. Il perimetro dell'esagono ABEFGD, invece, è: $2y + 2x$. Posso risolvere il sistema:

$$- \begin{cases} 2x + 4y = 84 \\ 2x + 2y = 52 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 10 \\ y = 16 \end{cases}$$
$$2y = 32$$

L'area è data da:

$$A = x^2 + y^2 + (y - x)^2 = (10\ cm)^2 + (16\ cm)^2 + (16\ cm - 10\ cm)^2 = \mathbf{392\ cm^2}$$

6. Si hanno a disposizione 150 uova, da suddividere in confezioni da 10 o da 12 uova ciascuna. In quanti modi diversi è possibile farlo senza avanzare uova? Quali sono?



Indico con x il numero di confezioni da 10 uova e con y il numero di confezioni da 12 uova. La relazione diventa: $10x + 12y = 150$, che, ridotta ai minimi termini, diventa: $5x + 6y = 75$. Si tratta di un'equazione lineare in due incognite, che ha, quindi, infinite soluzioni. Ho rappresentato, a lato, la retta indicata dall'equazione. Le soluzioni del problema sono date dalle coppie corrispondenti ai punti A, B, C, che hanno coordinate positive e intere (non si può tagliare a pezzi una confezione di uova). Le soluzioni sono, quindi, tre e sono:

$$\mathbf{(3, 10)} \qquad \mathbf{(9, 5)} \qquad \mathbf{(15, 0)}$$

dove il primo termine della coppia indica il numero di confezioni da 10 uova e il secondo il numero di confezioni da 12 uova.

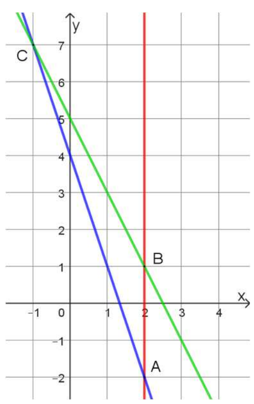
7. Scrivi due sistemi lineari di due equazioni in due incognite che abbiano la stessa soluzione.

Procedo individuando la soluzione (che scelgo, per convenienza, estremamente semplice) e poi costruisco le quattro equazioni che hanno la soluzione indicata:

Sistema 1	Sistema 2	Soluzione
$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x - y = 5 \end{cases}$	$(1; 0)$

8. Risolvi graficamente i seguenti sistemi (facendo un unico piano cartesiano):

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$



Ho rappresentato in rosso la retta $x = 2$, in blu la retta $3x + y = 4$ e in verde $2x + y = 5$.

Dal grafico ottengo le soluzioni dei sistemi dati:

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \quad \boldsymbol{A\ (2;\ -2)} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad \boldsymbol{B\ (2;\ 1)}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \quad \boldsymbol{C\ (-1;\ 7)}$$

9. Senza risolverli, stabilisci se i seguenti sistemi sono determinati, indeterminati o impossibili:

Per rispondere, riscrivo il sistema in forma normale: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$. So che un sistema è:

determinato se e solo se: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; impossibile se e solo se: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; indeterminato se e solo se: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\begin{cases} 3y - x = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} -x + 3y = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$	$-\frac{1}{2} \neq \frac{3}{1}$	**determinato**
$\begin{cases} 4y - 3x = 1 \\ 6x - 8y = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} -3x + 4y = 1 \\ 6x - 8y = -2 \end{cases}$	$-\frac{3}{6} = \frac{4}{-8} = \frac{1}{-2}$	**indeterminato**
$\begin{cases} x = 6 - y \\ 2(x - y) = 3y \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-5}$	**determinato**
$\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 4x + 8y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x + 8y = 0 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$	$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} \neq \frac{0}{3}$	**impossibile**
$\begin{cases} 2x + 6y = 7 \\ 3y + x = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 6y = 7 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$	$\frac{2}{1} = \frac{6}{3} \neq \frac{7}{12}$	**impossibile**

10. Risolvi i seguenti sistemi con il metodo algebrico che ritieni più conveniente:

$$\begin{cases} x = \frac{y - 1}{2} \\ x + (2y - 1)(x - 1) = 2xy \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2xy - 2y - x + 1 = 2xy \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = -\frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{4 - 5x}{6} \\ 2y - x = 3 \end{cases} \qquad \frac{\begin{cases} 8x - 2y = 4 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}}{7x = 7} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ -1 + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x + 3}{y + 1} = 3 \\ \dfrac{2y - 3}{x + \frac{2}{3}} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3 = 3y + 3 \\ 2y - 3 = 3x + 2 \end{cases} \quad C.A.: \begin{cases} x \neq -\frac{2}{3} \\ y \neq -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ \frac{9}{2}y - 2y = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = -3} \\ \boldsymbol{y = -2} \end{cases} \; acc.$$

11. Discuti e risolvi il seguente sistema letterale: $\begin{cases} 2x\,(k - 1) - y = 1 \\ 4x + (k + 2)\,y = k \end{cases}$

Procedo con il metodo di Cramer, calcolando i tre determinanti:

$$D = \begin{vmatrix} 2k - 2 & -1 \\ 4 & k + 2 \end{vmatrix} = 2k^2 + 4k - 2k - 4 + 4 = 2k^2 + 2k = 2k\,(k + 1)$$

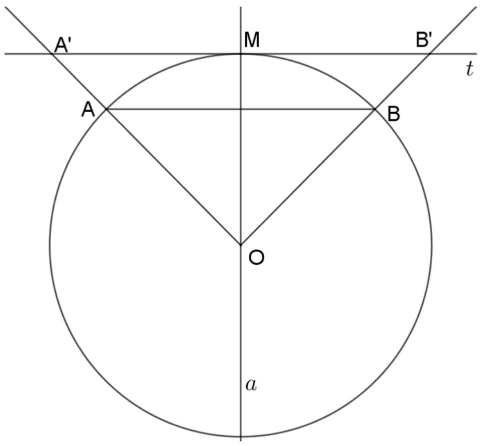
$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & k + 2 \end{vmatrix} = k + 2 + k = 2k + 2 = 2\,(k + 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2k - 2 & 1 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k - 4 = 2\,(k^2 - k - 2) = 2\,(k - 2)(k + 1)$$

Se $\boldsymbol{k = 0}$: $D = 0 \wedge D_x \neq 0$: sistema **impossibile**; Se $\boldsymbol{k = -1}$: $D = D_x = D_y = 0$: sistema **indeterminato**

Se $\boldsymbol{k \neq 0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{k \neq -1}$: $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{1}{k}} \\ \boldsymbol{y = \frac{k-2}{k}} \end{cases}$

12. **A.** Sia AB una corda, di lunghezza inferiore al diametro, di una circonferenza di centro O e sia M il punto di intersezione tra l'asse della corda e l'arco AB di misura minore. Tracciata la retta tangente alla circonferenza in M, siano A' e B' i punti di intersezione della tangente con i prolungamenti dei segmenti OA e OB. Dimostra che $A'M \cong MB'$.



Hp:
$\mathcal{C}, O, r$
$A, B \in \mathcal{C}; O \notin AB$
$a\ asse\ di\ AB$
$M \in arco\ AB$
$t \cap \mathcal{C} = \{M\}$
O, A, A' allineati
O, B, B' allineati
$A', B' \in t$

Tesi:
$A'M \cong MB'$

Dimostrazione:

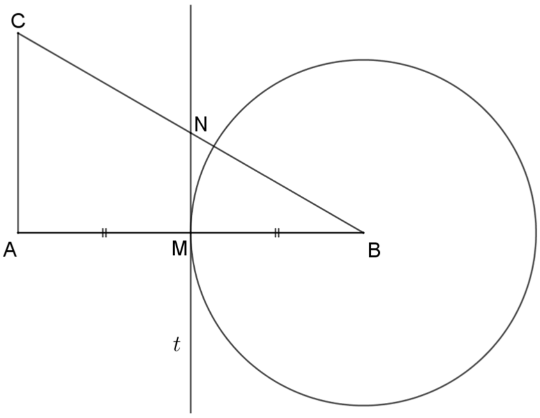
La retta a, in quanto asse del segmento AB, passa per il centro O della circonferenza, perché una retta perpendicolare a una corda e passante per il suo punto medio, passa per il centro. (*)

Considero i triangoli $A'MO$ e $B'MO$. Essi hanno:
- MO in comune
- $O\widehat{M}A' \cong O\widehat{M}B'$ e sono entrambi retti, perché il raggio tracciato per il punto di tangenza è perpendicolare alla tangente.
- $M\widehat{O}A' \cong M\widehat{O}B'$ perché l'asse a della corda AB è anche diametro della circonferenza (*) e, quindi, divide a metà l'angolo al centro corrispondente $A\widehat{O}B$.

I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, perciò $A'M \cong MB'$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

□

B. Sia ABC un triangolo rettangolo in A e sia M il punto medio del cateto AB. Costruita la circonferenza di centro B passante per M, considera la tangente alla circonferenza in M e sia N il punto di intersezione tra la tangente e l'ipotenusa BC. Dimostra che $BN \cong NC$.



Hp:
ABC triangolo
$AB \perp AC$
$M \in AB, AM \cong MB$
$\mathcal{C}, B, BM$
$t \cap \mathcal{C} = \{M\}$
$t \cap BC = \{N\}$

Tesi:
$BN \cong NC$

Dimostrazione:

Il raggio tracciato per il punto di tangenza è perpendicolare alla tangente, perciò $AB \perp t$. Ma, per ipotesi, $AB \perp AC$, perciò $AC \parallel t$.

La parallela al lato di un triangolo (AC) passante per il punto medio di un altro lato (AB) interseca il terzo lato (BC) nel suo punto medio (N), perciò:

$$BN \cong NC$$

□