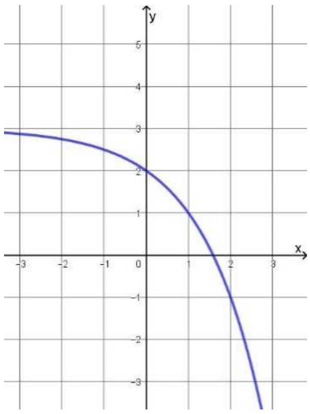
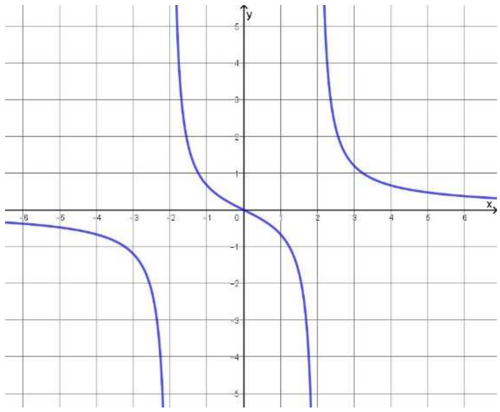
1. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false:

$\lvert x-4\rvert<\delta$ è un intorno circolare di 4	**V**	F
$\lvert -x-4\rvert<\delta$ è un intorno circolare di 4	V	**F**
$-5-2\delta<x<-5+2\delta$ è un intorno circolare di -5 di raggio δ	V	**F**
$-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}<x<2\varepsilon$ è un intorno di 0	**V**	F
Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sono formati da punti isolati	**V**	F
Gli insiemi con infiniti elementi non hanno punti isolati	V	**F**
L'insieme $\{x\in\mathbb{Z}:\ -2\le x\le 2\}$ non ha punti isolati	V	**F**
Se un insieme è formato da un numero finito di elementi, sono tutti punti isolati	**V**	F
Se x_o è un punto di accumulazione per l'insieme A, A è un insieme infinito	**V**	F
Se x_o è un punto di accumulazione per l'insieme A, A può essere un insieme limitato	**V**	F
Se x_o è un punto di accumulazione per l'insieme A, $x_o\in A$	V	**F**
Se x_o è un punto di accumulazione per l'insieme A, ogni intorno di x_o deve contenere almeno un punto di A	V	**F**

2. Dopo aver osservato i due grafici seguenti, individuane dominio e codominio, estremo inferiore e superiore, eventuali massimi e minimi e risolvi i limiti indicati, completando la tabella:





Dominio:	$D=\mathbb{R}$	$D=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$
Codominio	$C=(-\infty;3)$	$C=\mathbb{R}$
Inf	$-\infty$	$-\infty$
Sup	3	$+\infty$
Minimo		
Massimo		

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\mathbf{3}^-$ $\qquad\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\qquad\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\mathbf{0}^\pm$

$\lim_{x\to-2^\pm} f(x)=\pm\infty$ $\qquad\lim_{x\to2^\pm} f(x)=\pm\infty$

3. Stabilisci se l'insieme $A = \left\{x | \, x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$ è limitato inferiormente o superiormente e, in caso affermativo, trova l'estremo inferiore o l'estremo superiore. Stabilisci se si tratta di minimo o massimo.

Gli elementi dell'insieme sono compresi tra 0 e 1, come possiamo intuire facilmente elencando alcuni degli elementi di A:

$$A = \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}; \dots\right\}$$

Procediamo dimostrando che 0 è un minorante, ovvero: $x \geq 0, \forall x \in A: \frac{n-1}{n} \geq 0 \qquad 1 - \frac{1}{n} \geq 0 \qquad \frac{1}{n} \leq 1 \qquad n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Siccome $0 \epsilon A$, **0 è non solo minorante, ma minimo** per l'insieme A.
Procediamo dimostrando che 1 è un maggiorante, ovvero: $x \leq 1, \forall x \in A: \frac{n-1}{n} \leq 1 \qquad 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \frac{1}{n} \geq 0 \qquad n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Possiamo dimostrare, dato che non appartiene all'insieme, che è il più piccolo dei maggioranti, ovvero che $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A: x > 1 - \varepsilon$:

$$\frac{n-1}{n} > 1 - \varepsilon \qquad 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Quindi, $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} - \{0\}: n > \frac{1}{\varepsilon}$ e perciò **1 è un maggiorante** per l'insieme A.

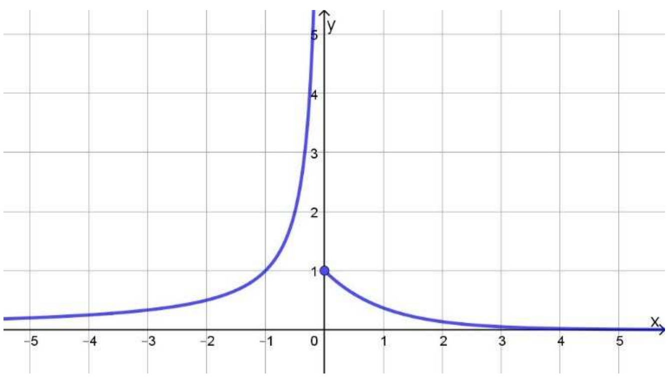
4. Verifica, applicando la definizione, che la funzione $f(x) = x^2 - 2x$ è continua nel punto $x_o = 1$.

Per la definizione di funzione continua in un punto, abbiamo: $\lim_{x \to 1}(x^2 - 2x) = f(1)$, ovvero: $\lim_{x \to 1}(x^2 - 2x) = -1$. Perché il limite sia verificato, dobbiamo avere: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists I(1) \mid |x^2 - 2x + 1| < \varepsilon, \forall x \in I(1) - \{1\}$
Svolgendo la disequazione: $|(x-1)^2| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{\varepsilon} < x - 1 < \sqrt{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{1 - \sqrt{\varepsilon} < x < 1 + \sqrt{\varepsilon}}$, che è un intorno di 1, perciò il limite è verificato.

5. Rappresenta graficamente la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ e verifica l'esistenza di un asintoto orizzontale mediante la definizione di limite.

La funzione è data, nel primo quadrante, da una parte della funzione esponenziale e, nel secondo quadrante, dalla legge di inversa proporzionalità. L'asse x è un asintoto orizzontale per entrambe, ovvero:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0^+ \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$$



Verifichiamo entrambi i limiti:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0^+: \quad \forall \varepsilon > 0, \exists c > 0: 0 < -\frac{1}{x} < \varepsilon, \forall x < -c$$

Procediamo con la soluzione della disequazione:

$$\begin{cases} -\frac{1}{x} > 0 \\ -\frac{1}{x} < \varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{-1 - \varepsilon x}{x} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \vee \quad x > 0 \end{cases} \qquad x < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Limite verificato.

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+: \quad \forall \varepsilon > 0, \exists c > 0: 0 < e^{-x} < \varepsilon, \forall x > c$$

Procediamo con la soluzione della disequazione:

$$0 < e^{-x} < \varepsilon \qquad e^{-x} < \varepsilon \qquad e^x > \frac{1}{\varepsilon} \qquad x > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad x > -\ln \varepsilon$$

Anche in questo caso il limite è verificato.

6. Trova per quale valore di a la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax - 7 & se\ x \geq -3 \\ \frac{5x-a}{x+1} & se\ x < -3 \end{cases}$ ammette limite nel punto $x = -3$.

Perché la funzione ammetta limite, dobbiamo avere: $\lim_{x \to -3^+}(x^2 - ax - 7) = \lim_{x \to -3^-} \frac{5x-a}{x+1}$. Calcoliamo i due limiti singolarmente:

$$\lim_{x \to -3^+}(x^2 - ax - 7) = 9 + 3a - 7 = 2 + 3a \qquad \lim_{x \to -3^-} \frac{5x - a}{x + 1} = \frac{-15 - a}{-2} = \frac{15}{2} + \frac{a}{2}$$

Otteniamo, quindi, l'equazione:

$$2 + 3a = \frac{15}{2} + \frac{a}{2} \qquad \frac{5}{2}a = \frac{11}{2} \qquad a = \mathbf{\frac{11}{5}}$$

7. Risolvi i seguenti limiti:

A. $\lim_{x \to 2^+} \frac{2x+4}{2-x} = -\infty$

B. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} (1 + e^{-2x}) = 1$

C. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x^2-9x+18}{x^3-8} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2(x-2)-9(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2-9)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = -\frac{5}{12}$

D. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}}{3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{3x} = -\frac{2}{3}$

E. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2-1}-\sqrt{4x^2+3}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2}-\sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2x}{2x} = \frac{1}{2}$

F. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 1} - x\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2} = 0$

G. $\lim_{x \to 0^+} (3x)^{\frac{1}{\ln\frac{x}{4}}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln(3x)^{\frac{1}{\ln\frac{x}{4}}}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{\ln\frac{x}{4}}\ln(3x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln 3+\ln x}{\ln x-\ln 4}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x-\ln 4+\ln 4+\ln 3}{\ln x-\ln 4}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\left(1+\frac{\ln 12}{\ln x-\ln 4}\right)} = e$

H. $\lim_{x \to +\infty} (x + 1)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln(x+1)^{\frac{1}{\ln x}}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\ln(x+1)} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\ln x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = e$

I. $\lim_{x \to -\infty} \log_3 \frac{3x+2}{x-1} = \log_3 \lim_{x \to -\infty} \frac{3x+2}{x-1} = \log_3 \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = 1$

L. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x+x}{4x-\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}+1\right)}{x\left(4-\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{2}{3}$

M. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 5x-1}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos 5x}{-2x^2} \cdot \frac{1+\cos 5x}{1+\cos 5x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin^2 5x}{(5x)^2} \cdot \frac{-25}{2(1+\cos 5x)}\right) = -\frac{25}{4}$

N. $\lim_{x \to \pi}(x - \pi) \tan\frac{x}{2} = \lim_{y \to 0} y \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y \to 0} y\left(-\cot\frac{y}{2}\right) = -2 \lim_{y \to 0} \frac{\frac{y}{2}}{\tan\frac{y}{2}} = -2 \lim_{y \to 0} \left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{y}{2}}\right)^{-1} = -2$

O. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan x+1}{\tan x}\right)^{\tan x} = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \boldsymbol{e}$

P. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-e^x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x(e^{3x}-1)}{3x} \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}\right) = 3 \lim_{x \to 0} e^x \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^{-1} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 3 \lim_{y \to 0} \frac{1}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}} = \mathbf{3}$