1. Una parabola $\mathcal{P}$ ha equazione $y = x^2 - 4x + 3$. Siano A e B i suoi punti di ordinata 3 (con $x_A < x_B$). La simmetria rispetto all'origine trasforma $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}'$ e i punti A e B nei punti A' e B'. Scrivi l'equazione di $\mathcal{P}'$ e verifica che A' e B' appartengono a $\mathcal{P}'$.

Determino innanzi tutto le coordinate dei punti A e B:

$$3 = x^2 - 4x + 3 \qquad x^2 - 4x = 0 \qquad x\,(x-4) = 0$$
$$A\,(0;3) \qquad B\,(4;3)$$

La simmetria rispetto all'origine ha equazioni $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Perciò i trasformati dei punti A e B sono:

$$A'\,(0;-3) \qquad B'\,(-4;-3)$$

Trasformo anche la parabola:

$$-y = x^2 + 4x + 3 \qquad y = -x^2 - 4x - 3$$

Verifico che i punti A' e B' appartengono alla nuova parabola, sostituendo le loro coordinate nell'equazione:

$$A':\quad -3 = 0 - 3 \qquad A' \in \mathcal{P}'$$
$$B':\quad -3 = -16 + 16 - 3 \qquad B' \in \mathcal{P}'$$

2. Le curve $x - y^2 - 2y + 3 = 0$ e $x + y^2 + 2y + 3 = 0$ sono simmetriche rispetto al punto A. Determina le coordinate di A.

Il punto A ha generiche coordinate: $A\,(a;b)$. Le equazioni della simmetria rispetto ad A sono:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Applico le equazioni della trasformazione alla seconda curva:

$$2a - x + (2b - y)^2 + 2\,(2b - y) + 3 = 0$$
$$x - y^2 + 2y\,(2b + 1) - 4b^2 - 4b - 3 - 2a = 0$$

La curva così determinata sarà uguale alla prima:

$$\begin{cases} 2\,(2b+1) = -2 \\ -4b^2 - 4b - 3 - 2a = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -1 \\ -4 + 4 - 3 - 2a = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = -3} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases}$$

Più semplicemente, posso determinare i due vertici e poi il loro punto medio: in questo modo trovo le coordinate del centro di simmetria.

3. Verifica che la circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ è simmetrica rispetto al suo centro.

Il centro della circonferenza ha coordinate: $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ e quindi la simmetria centrale ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -a - x \\ y' = -b - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -a - x' \\ y = -b - y' \end{cases}$$

Applico la trasformazione alla circonferenza e verifico che risulta la stessa circonferenza di partenza:

$$(-a - x)^2 + (-b - y)^2 + a\,(-a - x) + b\,(-b - y) + c = 0$$
$$a^2 + x^2 + 2ax + b^2 + y^2 + 2by - a^2 - ax - b^2 - by + c = 0$$
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

c.v.d.

4. Le rette di equazioni $2x + ay - b + 1 = 0$ e $ax - 2y + 3 + b = 0$ sono tra loro simmetriche rispetto all'asse x. Trova quali valori devono avere i due parametri a e b.

La simmetria rispetto all'asse x ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Applico le trasformazioni alla seconda equazione e pongo il risultato così ottenuto uguale alla prima equazione:

$$ax + 2y + 3 + b = 0$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ 3 + b = -b + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases}$$

5. Verifica che le curve $y = a^x$ e $y = log_a x$ sono simmetriche rispetto alla bisettrice di 1° e 3° quadrante.

La simmetria rispetto alla bisettrice di primo e terzo quadrante ha equazioni: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Applico la trasformazione alla funzione logaritmica:

$$x = log_a y \qquad a^x = a^{log_a y} \qquad a^x = y \qquad y = a^x$$

$c.v.d.$

6. Dato il punto $P\ (4;\ 4)$, determina il punto P' simmetrico di P rispetto alla retta $y = 2$ e il punto P" simmetrico di P' rispetto alla retta di equazione $x = 3$. Verifica che il punto P" è il simmetrico di P rispetto al punto di intersezione delle due rette considerate.

La simmetria rispetto alla retta y = 2 ha equazioni: $\begin{cases} x' = x \\ y' = 4 - y \end{cases}$

Perciò posso determinare le coordinate di P': $P'(4; 0)$

La simmetria rispetto alla retta x = 3 ha equazioni: $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = y \end{cases}$

Perciò posso determinare le coordinate di P": $P"(2; 0)$

La simmetria rispetto al punto di coordinate $(3; 2)$: $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$

Determino il trasformato di P, rispetto alle equazioni della simmetria centrale: $P'''(2; 0)$

$$P''' = P" \qquad c.v.d.$$

7. Nella traslazione di vettore $\vec{v}\ (a, b)$ il punto $A\ (a - 1; b + 2)$ ha per immagine il punto $B\ (5;\ -1)$. Determina i parametri a e b.

La traslazione ha equazioni: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Applico la trasformazione al punto A: $A'(2a - 1; 2b + 2)$. Tale punto coincide con il punto B:

$$\begin{cases} 2a - 1 = 5 \\ 2b + 2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = 3} \\ \boldsymbol{b = -\frac{3}{2}} \end{cases}$$

8. L'immagine di una traslazione del segmento di estremi $A\,(5;\,-3)$, $B\,(-1;1)$ è il segmento CD il cui punto medio è $M\,(-2;1)$. Individua il vettore.

Determino il punto medio del segmento AB: $N\,(2;\,-1)$. Tale punto viene trasformato in M dalla traslazione di equazioni: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b' \end{cases}$

perciò:

$$\begin{cases} -2 = 2 + a \\ 1 = -1 + b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\vec{v}\,(-4;2)}$$

9. Un'omotetia trasforma il punto $A\,(8;12)$ nel punto $A'(5;4)$, mentre l'immagine di $B\,(4;4)$ appartiene all'asse delle x. Determina centro e rapporto dell'omotetia.

Le generiche equazioni dell'omotetia sono:

$$\begin{cases} x' = k\,(x - x_C) + x_C \\ y' = k\,(y - y_C) + y_C \end{cases}$$

Applico le trasformazioni al punto A e ottengo il punto A' e determino l'ordinata di B':

$$\begin{cases} 5 = k\,(8 - x_C) + x_C \\ 4 = k\,(12 - y_C) + y_C \\ 0 = k\,(4 - y_C) + y_C \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 = 8k \\ 5 = k\,(8 - x_C) + x_C \\ 0 = k\,(4 - y_C) + y_C \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ 5 = 4 + \frac{1}{2}\,x_C \\ 0 = 2 + \frac{1}{2}y_C \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{k = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{x_C = 2} \\ \boldsymbol{y_C = -4} \end{cases}$$

10. Data l'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$, determina una similitudine che la trasformi nell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

Siccome l'immagine di O (0; 0) è O stesso, le generiche equazioni della similitudine sono: $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = -bx + ay \end{cases}$

Applico le trasformazioni alla seconda equazione:

$$(ax + by)^2 - (-bx + ay)^2 = 1$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy - b^2x^2 - a^2y^2 + 2abxy = 1$$

$$x^2\,(a^2 - b^2) + y^2\,(b^2 - a^2) + 4abxy = 1$$

Perché le due equazioni siano uguali, a e b devono essere concordi, perciò:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 4ab = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = b \\ 4a^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \pm\frac{1}{2} \\ b = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y} \\ \boldsymbol{y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y} \\ \boldsymbol{y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y} \end{cases}$$