1. Determina un numero di tre cifre sapendo che la somma della cifra delle unità e di quella delle decine supera di 6 quella delle centinaia, che se si scambia la cifra delle centinaia con quella delle unità si ottiene un numero che supera quello dato di 396 e che la somma delle tre cifre è 16.

Indico con z la cifra delle unità, con y la cifra delle decine e con x la cifra delle centinaia. Il numero da determinare è $N = 100x + 10y + z$.
Posso impostare il sistema:

$$\begin{cases} z + y = 6 + x \\ 100\,z + 10y + x = 100x + 10y + z + 396 \\ x + y + z = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y + z = 6 \\ 99z - 99x = 396 \\ x + y + z = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y + z = 6 \\ z - x = 4 \\ x + y + z = 16 \end{cases}$$

Sottraendo la prima dalla terza, trovo x: $2x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$
Dalla seconda equazione trovo z: $z - 5 = 4 \quad \Rightarrow \quad z = 9$
È molto facile, usando la prima o la terza equazione, determinare y: $5 + y + 9 = 16 \quad \Rightarrow \quad y = 2$
Il numero è: $\mathbf{529}$.

2. In un trapezio rettangolo la somma delle basi misura 15 cm, l'altezza supera di 1 cm la differenza delle basi e l'area misura 30 cm^2. Determina il perimetro del trapezio.

Indico con $x + y$ la somma delle basi ed è quindi possibile determinare subito l'altezza del trapezio:

$$\frac{(x+y)\,\cdot\,h}{2} = 30 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{30 \cdot 2}{15} = 4$$

Sapendo che l'altezza misura 4 cm e conoscendo la differenza tra le basi, è possibile determinare il lato obliquo L, applicando il teorema di Pitagora:

$$L = \sqrt{h^2 + (y - x)^2} = 5\,cm$$

È possibile, a questo punto, determinare il perimetro: $2p = x + y + h + L = \mathbf{24\,cm}$.

3. Determina due numeri, sapendo che la differenza tra loro è 41 e che dividendo il primo per il secondo, ottengo come quoziente 2 e come resto 10.

Indico con x il numero maggiore e con y il minore. Le due condizioni diventano:

$$\begin{cases} x - y = 41 \\ x = 2y + 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y + 10 - y = 41 \\ x = 2y + 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 31 \\ x = 2y + 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = 72} \\ \boldsymbol{y = 31} \end{cases}$$

4. Determina a e b in modo che il sistema

$$\begin{cases} ax - (2 + b)\,y = a - 2b \\ (a - b)\,x - by = 3a \end{cases}$$

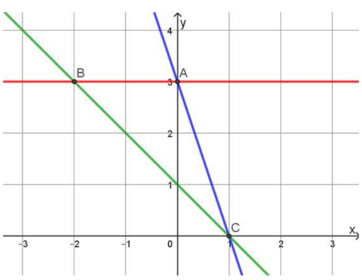
abbia come soluzione $(2; 1)$.

Per rispondere, sostituisco alle due incognite i valori dati dalla soluzione e poi risolvo il sistema in funzione di a e di b:

$$\begin{cases} 2a - 2 - b = a - 2b \\ 2a - 2b - b = 3a \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = 2 \\ -a - 3b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -3b \\ -3b + b = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = 3} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases}$$

5. Risolvi graficamente i seguenti sistemi (facendo un unico piano cartesiano):

$$\begin{cases} y = 3 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$



Ho rappresentato in rosso la retta $y = 3$, in blu la retta $3x + y = 3$ e in verde $x + y = 1$.

Dal grafico ottengo le soluzioni dei sistemi dati:

$$\begin{cases} y = 3 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \quad \boldsymbol{A\,(0;\ 3)} \qquad \begin{cases} y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \boldsymbol{B\,(-2;\ 2)}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \quad \boldsymbol{C\,(1;\ 0)}$$

6. Risolvi i seguenti sistemi con il metodo algebrico che ritieni più conveniente:

$$\begin{cases}(-3-x)(3+x)-y=-x^2\\ -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}y\right)=\frac{x+2y}{2}\end{cases} \quad \begin{cases}-9-6x-x^2-y=-x^2\\ -6x+9y=3x+6y\end{cases} \quad \begin{cases}6x+y=-9\\ 9x-3y=0\end{cases} \quad \frac{\begin{cases}6x+y=-9\\ 3x-y=0\end{cases}}{9x=-9} \quad \begin{cases}\boldsymbol{x=-1}\\ \boldsymbol{y=-3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2x+2y}=\frac{x+y+1}{x^2-y^2}\\ 2x+3y=-1\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{1}{2(x+y)}=\frac{x+y+1}{(x-y)(x+y)}\\ 2x+3y=-1\end{cases} \quad \begin{cases}x-y=2x+2y+2\\ 2x+3y=-1\end{cases} \quad \frac{-\begin{cases}x+3y=-2\\ 2x+3y=-1\end{cases}}{x=1} \quad \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$$

$$C.A.: x \neq \pm y$$

$non\ acc.$
$per\ C.A.$
$\boldsymbol{IMP.}$

7. Discuti e risolvi il seguente sistema letterale: $\begin{cases}(2-k)\,x-y=1\\ 3x-(k+2)\,y=3\end{cases}$

Procedo con il metodo di Cramer, calcolando i tre determinanti:

$$D=\begin{vmatrix}2-k & -1\\ 3 & -k-2\end{vmatrix}=-4+k^2+3=k^2-1=(k-1)(k+1)$$

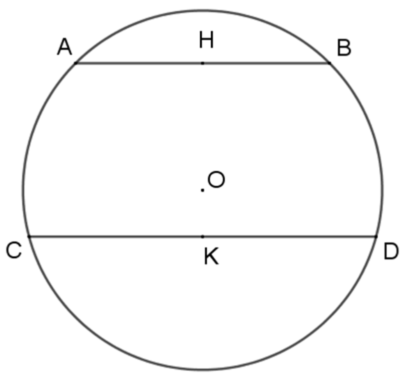
$$D_x=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -k-2\end{vmatrix}=-k-2+3=1-k=-(k-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2-k & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=6-3k-3=3-3k=-3(k-1)$$

Se $\boldsymbol{k=1}$: $D=D_x=D_y=0$: sistema **indeterminato**; Se $\boldsymbol{k=-1}$: $D=0 \wedge D_x\neq 0$: sistema **impossibile**

Se $\boldsymbol{k\neq\pm 1}$: $\begin{cases}x=\frac{D_x}{D}\\ y=\frac{D_y}{D}\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\boldsymbol{x=-\frac{1}{k+1}}\\ \boldsymbol{y=-\frac{3}{k+1}}\end{cases}$

8. Su una circonferenza di centro O considera due corde distinte AB e CD parallele. Considera i punti medi H e K delle due corde e dimostra che H, O e K sono allineati.



Hp:
$\mathcal{C}, O, r$
$A, B, C, D \in \mathcal{C}$
$AB \parallel CD$
$H \in AB, AH \cong HB$
$K \in CD, CK \cong KD$

Tesi:
H, O, K allineati

Dimostrazione:

Considero il segmento HO: essendo passante per il centro della circonferenza e per il punto medio della corda, è perpendicolare alla corda: $HO \perp AB$.

Considero il segmento KO: essendo passante per il centro della circonferenza e per il punto medio della corda, è perpendicolare alla corda: $KO \perp CD$.

Siccome AB e CD sono parallele per ipotesi, la retta passante per O e perpendicolare a entrambe è una sola, perciò H, O e K sono allineati.

□