1. Due forze costanti di moduli F_1 e F_2, che differiscono di $100\ N$, producono lo stesso impulso. La prima forza produce il suo impulso in un intervallo di tempo Δt_1, la seconda produce il suo impulso in un intervallo di tempo doppio di quello della prima. Calcola i moduli delle due forze.

$$F_1 - F_2 = 100\ N \qquad I_1 = I_2 \qquad \Delta t_2 = 2\Delta t_1 \qquad F_1? \qquad F_2?$$

Sapendo che le due forze producono lo stesso impulso e applicando la definizione di impulso, ottengo:

$$I_1 = I_2 \quad \Rightarrow \quad F_1\Delta t_1 = F_2\Delta t_2 \quad \Rightarrow \quad F_1\Delta t_1 = F_2 \cdot 2\Delta t_1 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 2F_2$$

Sapendo che la loro differenza è di 100 N, posso determinare le due forze:

$$\begin{cases} F_1 = 2F_2 \\ F_1 - F_2 = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_1 = 2F_2 \\ 2F_2 - F_2 = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{F_1 = 200\ N} \\ \boldsymbol{F_2 = 100\ N} \end{cases}$$

2. In un test d'urto, un'automobile di 1400 kg è lanciata contro un muro alla velocità di 12 m/s. Subito dopo il contatto, che dura 0,14 s, l'automobile si sposta in verso opposto con velocità pari a 2,0 m/s. Qual è la forza media che agisce sull'automobile durante l'urto?

$$m = 1400\ kg \qquad v_1 = -12\ m/s \qquad \Delta t = 0{,}14\ s \qquad v_2 = 2{,}0\ m/s \qquad F?$$

Per il teorema dell'impulso: $F\Delta t = mv_2 - mv_1$. Ho tutti gli elementi per determinare la forza:

$$F = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t} = \boldsymbol{1{,}4 \cdot 10^5\ N}$$

3. Un carrello avente massa 0,75 kg, col misuratore di impulso montato davanti, è lanciato con una velocità di 2,00 m/s lungo un binario morto, alla fine del quale urta contro un respingente fissato al suolo. Il rilevatore di impulso dopo l'urto segna il valore di 2,90 Ns. Qual è la percentuale di energia cinetica persa nell'urto?

$$m = 0{,}75\ kg \qquad v_o = -2{,}00\ m/s \qquad I = 2{,}90\ Ns \qquad \frac{\Delta K}{K_o}?$$

L'impulso ha verso opposto rispetto alla velocità iniziale. Ho scelto come verso positivo quello dell'impulso.
Per poter determinare la percentuale di energia cinetica persa nell'urto, devo determinare la velocità finale. Applico il teorema dell'impulso:

$$I = mv - mv_o \quad \Rightarrow \quad v = v_o + \frac{I}{m}$$

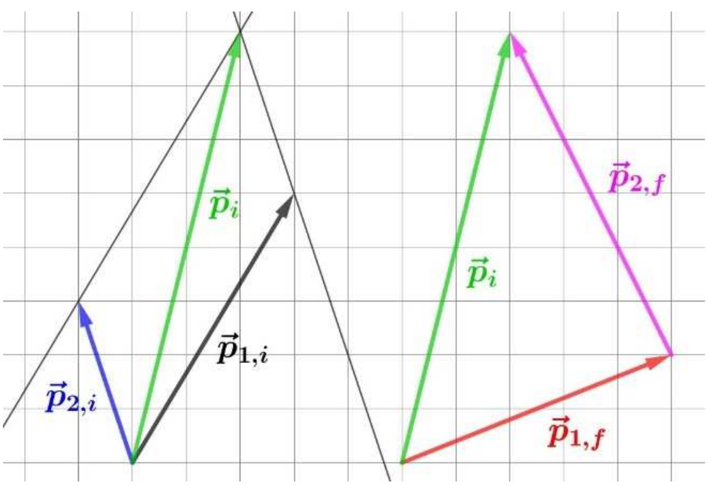
Procedo a determinare la percentuale richiesta:

$$\frac{\Delta K}{K_o} = \frac{K - K_o}{K_o} = \frac{K}{K_o} - 1 = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_o^2} - 1 = \frac{v^2}{v_o^2} - 1 = \frac{\left(v_o + \frac{I}{m}\right)^2}{v_o^2} - 1 = \left(1 + \frac{I}{mv_o}\right)^2 - 1 = \left(\frac{I}{mv_o}\right)^2 + \frac{2I}{mv_o} = \boldsymbol{-13\ \%}$$

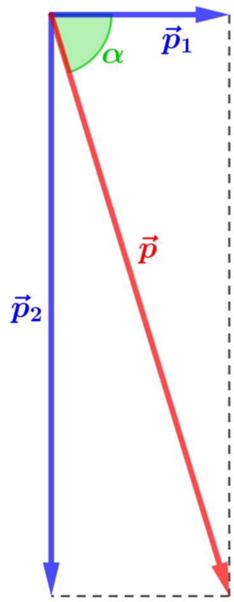
4. Due oggetti si urtano. La figura mostra le quantità di moto iniziali $\vec{p}_{1,i}$ e $\vec{p}_{2,i}$ dei due oggetti e la quantità di moto finale del primo oggetto $\vec{p}_{1,f}$. Disegna la quantità di moto finale del secondo oggetto, motivando lo svolgimento.

Determino la somma delle due quantità di moto iniziali, applicando la regola del parallelogramma e ottengo il vettore indicato in verde.

Per la **legge della conservazione della quantità di moto**, $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, perciò, nel caso finale, ho la somma delle due quantità di moto e uno degli addendi.
Completando il disegno con l'applicazione del metodo punta-coda, ottengo il vettore richiesto, che ha componenti $(-3; 6)$.



5. Un pattinatore di massa $50{,}0\ kg$, che si muove verso est con una velocità di $3{,}00\ m/s$, urta un altro pattinatore di $70{,}0\ kg$, che si sta muovendo verso sud con una velocità di $7{,}00\ m/s$. Dopo l'urto i due pattinatori si muovono assieme. Calcola il modulo della loro velocità e l'angolo che questa forma rispetto a est.



$$m_1 = 50{,}0\ kg \qquad v_1 = 3{,}00\ m/s \qquad m_2 = 70{,}0\ kg \qquad v_2 = 7{,}00\ m/s \qquad V? \qquad \alpha?$$

Rappresentate le due quantità di moto, determino graficamente la loro somma. Dato che le due quantità di moto iniziali sono fra loro perpendicolari, la quantità di moto totale iniziale sarà data dall'ipotenusa del triangolo rettangolo formato dalle due quantità di moto, che non sono altro che i cateti del triangolo.
Per la legge di conservazione della quantità di moto, quantità di moto iniziale e finale sono uguali, perciò posso determinare il modulo della velocità finale applicando il teorema di Pitagora:

$$p_1^2 + p_2^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 = [(m_1 + m_2)\, V]^2$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2} = \mathbf{4{,}3\ m/s}$$

L'angolo che la velocità forma rispetto alla direzione est è uguale all'angolo formato dalla quantità di moto totale con la direzione est, visto che la quantità di moto ha la direzione e il verso della velocità. Sapendo che, in un triangolo rettangolo, $c_1 = c_2 \tan\alpha$, dove α è l'angolo opposto al primo cateto, ottengo:

$$p_2 = p_1 \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{p_2}{p_1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \mathbf{73°}$$

6. Un oggetto, inizialmente a riposo, si rompe in due pezzi in seguito a un'esplosione. Un pezzo possiede due volte l'energia cinetica dell'altro pezzo. Qual è il rapporto fra le masse dei due pezzi? Quale pezzo ha la massa maggiore?

$$K_2 = 2K_1 \qquad \frac{m_2}{m_1}?$$

Data la quantità di moto iniziale nulla (l'oggetto è inizialmente a riposo), nel momento in cui si rompe in due pezzi, questi si muovono lungo la stessa retta (per poter mantenere una quantità di moto totale nulla). Applico innanzi tutto la conservazione della quantità di moto:

$$0 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = -\frac{m_2}{m_1} V_2$$

Sostituisco la relazione appena determinata nella condizione data: $K_2 = 2K_1$

$$\frac{1}{2} m_2 V_2^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 V_2^2 = 2 m_1 \frac{m_2^2}{m_1^2} V_2^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2}}$$

Il pezzo con la massa maggiore è quello con l'energia cinetica minore.

7. Un razzo, sparato verticalmente a una velocità di $500\ m/s$, esplode arrivato a una certa quota dividendosi in tre parti uguali. Subito dopo l'esplosione, il primo pezzo prosegue verso l'alto a una velocità di $600\ m/s$ e il secondo si muove orizzontalmente a una velocità di $300\ m/s$. Calcola la componente orizzontale e quella verticale della velocità del frammento restante.

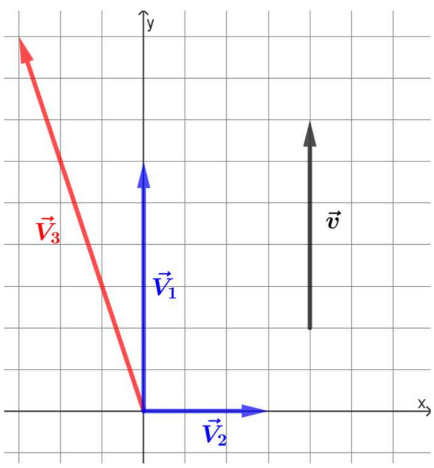
$$M = 3m \qquad v = 500\ m/s \qquad m_1 = m_2 = m_3 = m$$

$$V_1 = 600\ m/s \qquad V_2 = 300\ m/s \qquad V_{3x}? \qquad V_{3y}?$$

Applico la legge della conservazione della quantità di moto, nelle due componenti:

$$asse\ x: 0 = mV_2 + mV_{3x} \quad \Rightarrow \quad V_{3x} = -V_2 = \mathbf{-300\ m/s}$$

$$asse\ y: 3mv = mV_1 + mV_{3y} \quad \Rightarrow \quad V_{3y} = 3v - V_1 = \mathbf{900\ m/s}$$



8. Una pallottola di massa $10\ g$ colpisce alla velocità di $280\ m/s$ un pendolo balistico di massa $2{,}0\ kg$, restando incorporata nel pendolo. Calcola l'altezza a cui si innalza il pendolo.

$$m = 10 \cdot 10^{-3}\ kg \qquad v_1 = 280\ m/s \qquad M = 2{,}0\ kg \qquad v_2 = 0\ m/s \qquad h?$$

Quello tra la pallottola e il pendolo balistico è un urto totalmente anelastico. Determino la velocità finale del sistema applicando la legge di conservazione della quantità di moto:

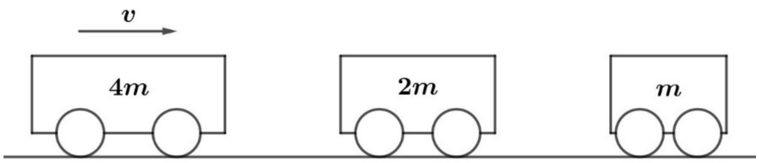
$$mv_1 + Mv_2 = (m+M)\,V \quad \Rightarrow \quad V = v_1 \frac{m}{m+M}$$

Per determinare l'altezza raggiunta dal pendolo, applico la legge di conservazione dell'energia meccanica. Nel punto più basso, quello in cui la pallottola colpisce il pendolo, posso considerare l'altezza nulla e, quindi, l'energia potenziale è nulla, mentre la velocità è pari a quella assunta dal sistema pallottola-pendolo dopo l'urto. Nel punto più alto, l'energia cinetica è nulla in quanto la velocità finale è nulla, mentre l'energia potenziale è direttamente proporzionale all'altezza raggiunta dal pendolo (l'altezza da determinare). In equazioni:

$$\frac{1}{2}(m+M)\,V^2 = (m+M)\,gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \cdot \frac{m^2}{(m+M)^2} = \boldsymbol{9{,}9\ cm}$$

9. I tre carrelli mostrati nella figura hanno masse rispettivamente $4\,m$, $2\,m$ ed m. Il carrello con massa maggiore ha una velocità iniziale v, mentre gli altri due carrelli sono inizialmente a riposo. Tutti i carrelli sono forniti di paraurti a molla che rendono le collisioni elastiche.
   A. Determina la velocità finale di ciascun carrello.
   B. Verifica che l'energia cinetica finale del sistema è uguale a quella iniziale (assumendo che la rotaia sia abbastanza lunga per contenere tutti gli urti).

$$m_1 = 4m \qquad m_2 = 2m \qquad m_3 = m$$
$$v_1 = v \qquad v_2 = v_3 = 0$$
$$V_1? \qquad V_2? \qquad V_3?$$



Considero innanzi tutto l'urto tra il primo e il secondo carrello. Trattandosi di un urto elastico, si conserveranno sia la quantità di moto che l'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2' \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2(V_2')^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v = 2V_1 + V_2' \\ 2v^2 = 2V_1^2 + (V_2')^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\,(v - V_1) = V_2' \\ 2\,(v-V_1)(v+V_1) = (V_2')^2 \end{cases}$$

Mantenendo la prima equazione e sostituendo alla seconda il risultato del rapporto membro a membro tra la seconda e la prima equazione, ottengo:

$$\begin{cases} 2v - 2V_1 = V_2' \\ v + V_1 = V_2' \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per 2 e sommando membro a membro, ottengo il valore della velocità finale del secondo carrello, mentre sottraendo la prima equazione dalla seconda (senza moltiplicare per 2), ottengo il valore della velocità finale del primo carrello:

$$\begin{cases} 4v = 3V_2' \\ v - 3V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{V_1 = \frac{1}{3}v} \\ V_2' = \frac{4}{3}v \end{cases}$$

La velocità finale del secondo carrello diventa la velocità iniziale nel secondo urto, quello tra secondo e terzo carrello. Anche in questo caso, trattandosi di un urto elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_2V_2' + m_3v_3 = m_2V_2 + m_3V_3 \\ \frac{1}{2}m_2(V_2')^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 = \frac{1}{2}m_2V_2^2 + \frac{1}{2}m_3V_3^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \cdot \frac{4}{3}v = 2V_2 + V_3 \\ 2 \cdot \frac{16}{9}v^2 = 2V_2^2 + V_3^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\left(\frac{4}{3}v - V_2\right) = V_3 \\ 2\left(\frac{4}{3}v - V_2\right)\left(\frac{4}{3}v + V_2\right) = V_3^2 \end{cases}$$

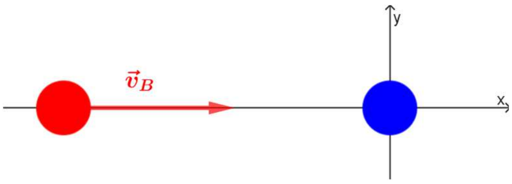
Mantenendo la prima equazione e sostituendo alla seconda il risultato del rapporto membro a membro tra la seconda e la prima equazione, ottengo:

$$\begin{cases} \frac{8}{3}v - 2V_2 = V_3 \\ \frac{4}{3}v + V_2 = V_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{8}{3}v - 2V_2 = \frac{4}{3}v + V_2 \\ V_3 = \frac{4}{3}v + V_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_2 = \boldsymbol{\frac{4}{9}v} \\ V_3 = \boldsymbol{\frac{16}{9}v} \end{cases}$$

A questo punto, non resta che verificare la conservazione dell'energia cinetica:

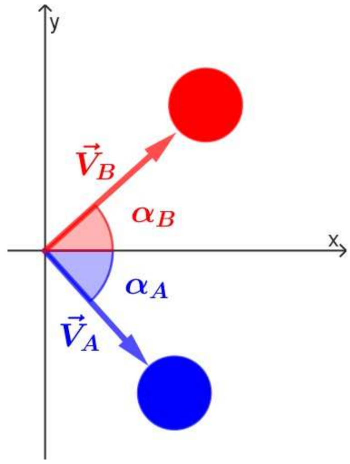
$$\frac{1}{2} \cdot 4mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{3}v\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \left(\frac{4}{9}v\right)^2 + \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{16}{9}v\right)^2 \;\Rightarrow\; 2mv^2 = \frac{2}{9}mv^2 + \frac{16}{81}mv^2 + \frac{128}{81}mv^2 \;\Rightarrow\; 2mv^2 = 2mv^2$$

10. In una partita a biliardo un giocatore colpisce elasticamente una palla A con una palla identica B, lanciata a $2{,}1\ m/s$. Dopo l'urto la palla B si muove in una direzione deviata di $42°$ rispetto a quella iniziale. Determina le velocità delle due palle dopo l'urto.



Prima dell'urto

$$v_B = 2{,}1\ ms \qquad v_A = 0\ ms$$
$$m_A = m_B = m \qquad \alpha_B = 42°$$
$$V_A? \qquad V_B?$$



Dopo l'urto

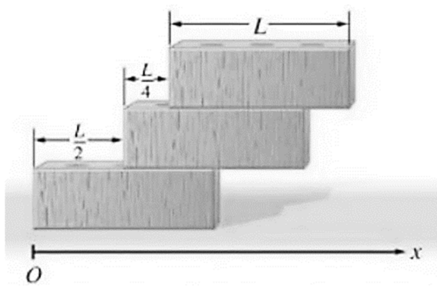
Trattandosi di un urto elastico tra due palline identiche, dopo l'urto le due palline avranno velocità con direzioni perpendicolari tra loro, perciò: $\boldsymbol{\alpha_A = 48°}$.
Per determinare le velocità richieste, applico la legge di conservazione della quantità di moto lungo l'asse y e la conservazione dell'energia cinetica:

$$\begin{cases} 0 = mV_A \sin\alpha_A - mV_B \sin\alpha_B \\ \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mV_A^2 + \frac{1}{2}mV_B^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_A = V_B \dfrac{\sin\alpha_B}{\sin\alpha_A} \\ v_B^2 = V_A^2 + V_B^2 \end{cases}$$

Sostituisco V_A nella seconda equazione e la risolvo ricavando V_B.

$$v_B^2 = V_B^2 \left(\frac{\sin\alpha_B}{\sin\alpha_A}\right)^2 + V_B^2 \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{v_B}{\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha_B}{\sin\alpha_A}\right)^2 + 1}} = \mathbf{1{,}6\ m/s} \qquad V_A = \mathbf{1{,}4\ m/s}$$

11. Calcola la coordinata x del centro di massa dei tre mattoni disposti come mostrato in figura 1.



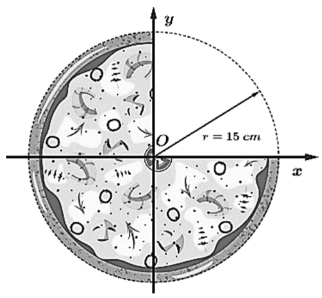
Il centro di massa di tutti i mattoni, presi singolarmente, per quanto riguarda l'asse x, si trova a metà della loro lunghezza, quindi in L/2.
Numero i mattoni a partire da quello più in basso:

$$x_1 = \frac{L}{2} \qquad x_2 = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L \qquad x_3 = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{4} = \frac{5}{4}L$$

I tre mattoni hanno la stessa massa: $m_1 = m_2 = m_3 = m$.
A questo punto applico la definizione di centro di massa:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{mL}{2} + mL + \frac{5}{4}mL}{3m} = \frac{L}{6} + \frac{L}{3} + \frac{5}{12}L = \mathbf{\frac{11}{12}L}$$

12. Da una pizza è stata tagliata una porzione, come mostrato in figura 2. La posizione del centro di massa della parte di pizza rimasta è $(-3{,}5\ cm;\ -3{,}5\ cm)$. Assumendo che ogni quadrante della pizza sia uguale agli altri, determina la posizione del centro di massa della parte di pizza rimasta che sta sopra l'asse x (cioè quella corrispondente al secondo quadrante).



Considerando la simmetria della pizza, se il centro di massa del quarto contenuto nel secondo quadrante ha coordinate $(-a;\ b)$, con $a > 0$ e $b > 0$, il centro di massa del quarto contenuto nel terzo quadrante ha coordinate $(-a;\ -b)$ e il centro di massa del quarto quadrante ha coordinate $(a;\ -b)$. Considerato che tutti i quarti hanno la stessa massa m, applico la definizione di centro di massa:

$$x_{CM} = \frac{-am - am + am}{m + m + m} = -\frac{a}{3} \qquad y_{CM} = \frac{bm - bm - bm}{m + m + m} = -\frac{b}{3}$$

Ponendo le due coordinate generiche appena trovate alle coordinate date dal testo, ottengo il centro di massa del secondo quadrante:

$$-\frac{a}{3} = -3{,}5\ cm \quad \Rightarrow \quad a = 10{,}5\ cm \qquad -\frac{b}{3} = -3{,}5\ cm \quad \Rightarrow \quad b = 10{,}5\ cm$$

Perciò la posizione del centro di massa della parte di pizza rimasta che sta sopra l'asse x ha coordinate: $\mathbf{(-10{,}5\ cm;\ 10{,}5\ cm)}$.