1. Risolvi graficamente le seguenti disequazioni irrazionali:

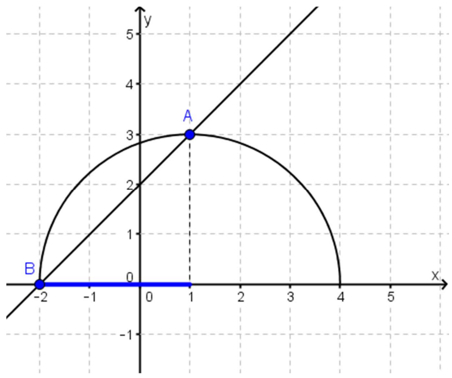
   a. $\sqrt{2x - x^2 + 8} > x + 2$

   Considero il sistema che risolve l'equazione associata:

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x - x^2 + 8} \\ y = x + 2 \end{cases}$$

   La prima equazione è quella di una semicirconferenza di centro $C(1,0)$ e raggio 3, presa solo nella sua parte superiore, ovvero per $y \geq 0$.
   La seconda è l'equazione di una retta parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante.
   Dalla rappresentazione a lato, otteniamo la soluzione:

$$\boldsymbol{-2 < x < 1}$$



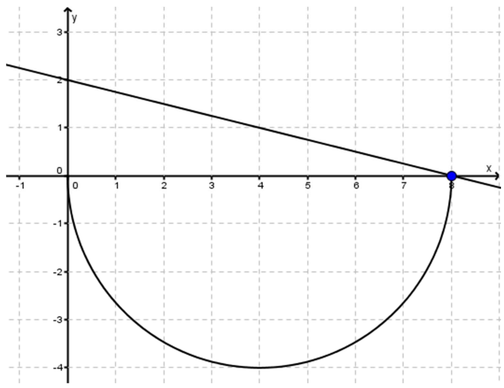
   b. $2 - \sqrt{8x - x^2} \geq -\frac{1}{4}x + 4$

   Considero il sistema che risolve l'equazione associata:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{8x - x^2} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + 2 \end{cases}$$

   La prima equazione è quella di una semicirconferenza di centro $C(4,0)$ e raggio 4, presa solo nella sua parte inferiore, ovvero per $y \leq 0$.
   La seconda è l'equazione di una retta.
   Dalla rappresentazione a lato, otteniamo l'unica soluzione:

$$\boldsymbol{x = 8}$$

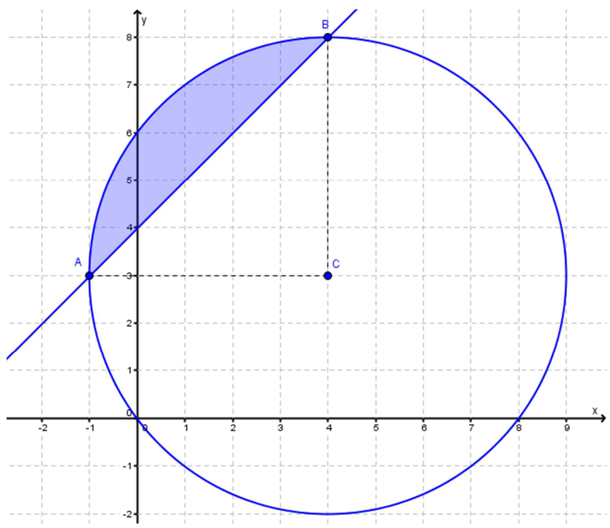


2. Trova l'area della regione individuata dal seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y \leq 0 \\ y \geq x + 4 \end{cases}$$

La prima disequazione è la parte interna di una circonferenza di centro $C(4,3)$, passante per l'origine.
La seconda disequazione rappresenta una retta parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante, passante per il punto $(0,4)$ e prendo la parte superiore della retta, perché sostituendo le coordinate dell'origine, non ottengo una proposizione vera.
La parte colorata nella figura a lato rappresenta l'intersezione delle due figure sopra citate. Per determinarne l'area, considero innanzi tutto che la parte di circonferenza delimitata dai punti A, C e B è un quarto della circonferenza. Se da questa parte, sottraggo l'area del triangolo rettangolo isoscele, di cateto 5, CBA, ottengo l'area richiesta:

$$Area = \frac{25\,\pi}{4} - 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{25}{4}(\pi - 2)}$$



3. Trova le equazioni corrispondenti ai seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure:

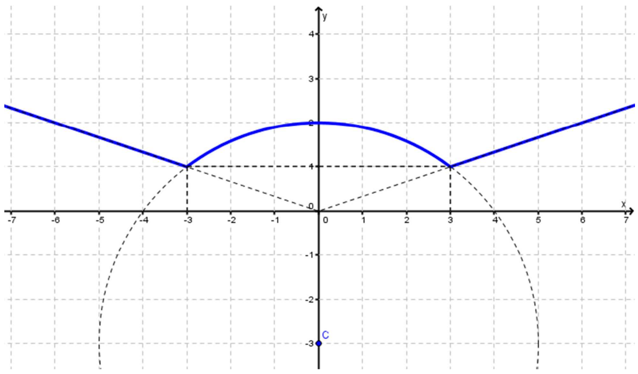


Figura 1

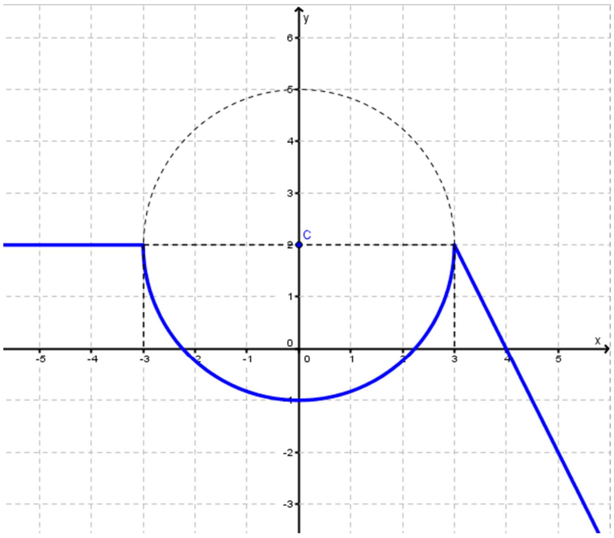


Figura 2

Figura 1:

L'arco di circonferenza di centro $C(0,-3)$ e raggio 5 ha equazione:

$$x^2+(y+3)^2=25 \qquad (y+3)^2=25-x^2 \qquad y+3=\pm\sqrt{25-x^2}$$

Scelgo il segno positivo, visto che ho rappresentato la parte superiore di circonferenza:

$$y=-3+\sqrt{25-x^2}$$

Le due rette sono entrambe passanti per l'origine e sono simmetriche rispetto all'asse y, perciò hanno equazione rispettivamente:

$$y=\frac{1}{3}x \qquad y=-\frac{1}{3}x$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y=\begin{cases}-3+\sqrt{25-x^2} & -3\le x\le 3\\ \dfrac{1}{3}|x| & x<-3 \ \vee \ x>3\end{cases}}$$

Figura 2:

L'arco di circonferenza di centro $C(0,2)$ e raggio 3 ha equazione:

$$x^2+(y-2)^2=9 \qquad (y-2)^2=9-x^2 \qquad y-2=\pm\sqrt{9-x^2}$$

Scelgo il segno negativo, visto che ho rappresentato la parte inferiore di circonferenza:

$$y=2-\sqrt{9-x^2}$$

Le due rette sono una parallela all'asse x e l'altra di coefficiente angolare -2 e passante per il punto $(0,8)$, di equazione, rispettivamente:

$$y=2 \qquad y=-2x+8$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y=\begin{cases}2 & x\le -3\\ 2-\sqrt{9-x^2} & -3<x<3\\ 8-2x & x\ge 3\end{cases}}$$

4. Sia dato il fascio di rette di equazione: $(k+1)\,x+(3k+2)\,y-k=0$. Determina:
   a. le equazioni delle generatrici;
   b. le coordinate del centro (avendo verificato che si tratta di un fascio proprio);
   c. il valore del parametro per cui si ottiene una retta perpendicolare alla retta passante per $A(5,4)$ e $B(3,1)$;
   d. il valore del parametro per cui si ottiene una retta che passa per il centro della circonferenza $x^2+y^2-6x+8y-3=0$;
   e. il valore del parametro per cui si ottiene una retta che forma con gli assi cartesiani un triangolo di area $\frac{9}{4}$.

a. Riscrivo l'equazione del fascio, isolando il parametro:

$$k\,(x+3y-1)+x+2y=0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x+3y-1=0} \qquad e \qquad \boldsymbol{x+2y=0}$$

b. Siccome le due generatrici non sono parallele, il fascio è proprio. Posso perciò determinare il centro del fascio, calcolando le coordinate del punto di intersezione tra le due rette:

$$\begin{cases} x+3y-1=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y-1=0 \\ x=-2y \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{C(-2,1)}$$

c. Determino innanzi tutto il coefficiente angolare della retta passante per i punti A e B:

$$m_{AB}=\frac{4-1}{5-3}=\frac{3}{2}$$

La retta perpendicolare avrà coefficiente angolare $-\frac{2}{3}$. Riscrivo perciò l'equazione del fascio in forma esplicita e pongo il coefficiente angolare uguale a $-\frac{2}{3}$:

$$y=-\frac{k+1}{3k+2}x+\frac{k}{3k+2} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{k+1}{3k+2}=-\frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad 3k+3=6k+4 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{k=-\frac{1}{3}}$$

d. Il centro della circonferenza ha coordinate $(3,-4)$. Impongo il passaggio del fascio per il punto dato, sostituendo le sue coordinate all'interno dell'equazione del fascio:

$$3k+3-12k-8-k=0 \qquad \Rightarrow \qquad -10k=5 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{k=-\frac{1}{2}}$$

e. I triangoli che si verranno a formare con gli assi cartesiani saranno rettangoli, con i cateti sugli assi cartesiani. Determino quindi le coordinate dei punti di intersezione del fascio con gli assi:

$$\begin{cases} (k+1)\,x+(3k+2)\,y-k=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} (3k+2)\,y=k \\ x=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A\left(0,\frac{k}{3k+2}\right)$$

$$\begin{cases} (k+1)\,x+(3k+2)\,y-k=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} (k+1)\,x=k \\ y=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad B\left(\frac{k}{k+1},0\right)$$

Dati i due cateti di misure, rispettivamente, $\left|\frac{k}{3k+2}\right|$ e $\left|\frac{k}{k+1}\right|$, posso imporre l'area del triangolo uguale a $\frac{9}{4}$:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{k}{3k+2}\right|\left|\frac{k}{k+1}\right|=\frac{9}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{k^2}{(3k+2)(k+1)}=\pm\frac{9}{2}$$

Risolviamo quindi le due equazioni:

$$2k^2=9\,(3k^2+3k+2k+2) \qquad \Rightarrow \qquad 25k^2+45k+18=0 \qquad k_{1,2}=\frac{-45\pm 5\sqrt{81-72}}{50}=\left\langle \begin{array}{l} \boldsymbol{-\frac{3}{5}} \\ \boldsymbol{-\frac{6}{5}} \end{array}\right.$$

$$2k^2=-9\,(3k^2+3k+2k+2) \qquad \Rightarrow \qquad 29k^2+45k+18=0 \qquad \Delta<0 \quad impossibile$$