1. Determina le equazioni della trasformazione $s \circ t$, ottenuta componendo la traslazione t di vettore $\vec{v}\ (4;6)$ con la simmetria s rispetto alla retta di equazione $y=-2$. Applica $s \circ t$ al segmento AB, con $A\ (-8;2)$ e $B\ (1;2)$, ottenendo il segmento $A'B'$. Calcola l'area del quadrilatero $A'B'BA$ dopo aver stabilito di quale quadrilatero si tratta.

Scriviamo innanzi tutto l'equazione della traslazione t:

$$t: \begin{cases} x' = x+4 \\ y' = y+6 \end{cases}$$

Le equazioni della simmetria s sono:

$$s: \begin{cases} x' = x \\ y' = -4-y \end{cases}$$

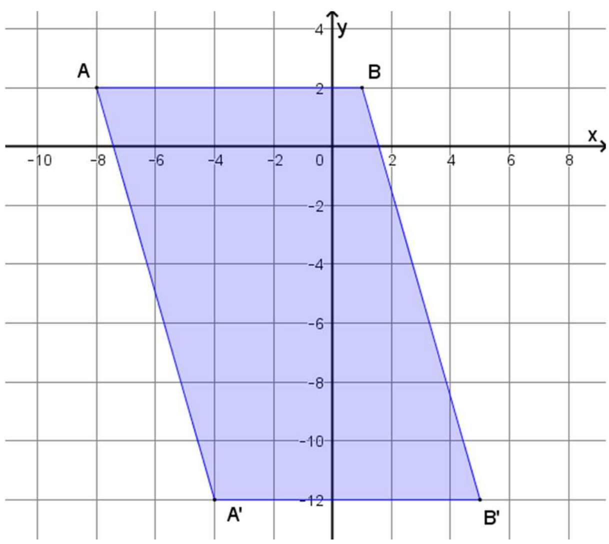
Compongo le due trasformazioni:

$$s \circ t: \begin{cases} x' = x+4 \\ y' = -y-10 \end{cases}$$

Applico la trasformazione agli estremi del segmento:

$$A\ (-8;2) \to A'(-4;\ -12)$$
$$B\ (1;2) \to B'(5;\ -12)$$

Ora posso rappresentare i due segmenti:



Si tratta di un parallelogrammo, perché:
- le due trasformazioni sono isometrie, perciò il segmento AB viene trasformato in un segmento A'B' ad esso congruente;
- il segmento AB viene trasformato dalla traslazione in un segmento ad esso parallelo e, considerando che il segmento è parallelo all'asse x – proprio come l'asse della simmetria assiale – viene trasformato dalla simmetria in un segmento parallelo all'asse x, quindi $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$.

Un quadrilatero con una coppia di lati opposti paralleli e congruenti è un **parallelogrammo**.

La distanza tra i due segmenti (ovvero l'altezza del parallelogrammo), si ottiene facendo la differenza in valore assoluto tra le ordinate di due punti corrispondenti: $h = |y'_B - y_B| = |-12-2| = 14$. La base $\overline{A'B'} = |x'_B - x'_A| = |5+4| = 9$.
L'area ha quindi valore: $\mathcal{A}_{A'B'BA} = 14 \cdot 9 = \mathbf{126}$

2. Data la trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = \dfrac{1}{2}y-2 \end{cases}$$

scrivi l'equazione della curva γ' trasformata della circonferenza di centro $C\ (1;1)$ e raggio 3. Riconosci la curva ottenuta, rappresentala e determina l'area che essa racchiude.

La circonferenza di centro C e raggio 3 ha equazione:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

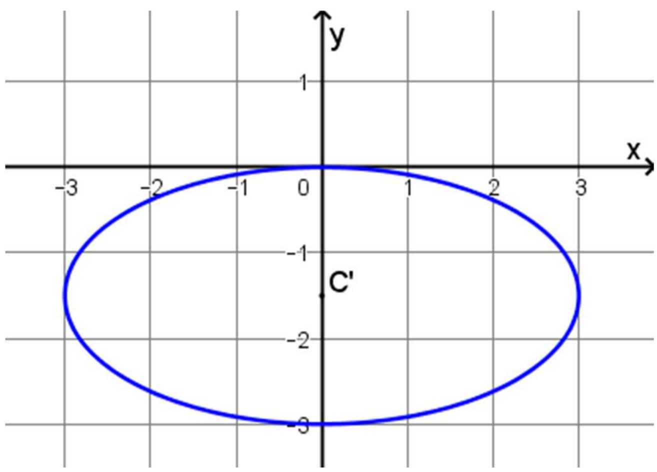
Determino l'inversa della trasformazione data:

$$\begin{cases} x = x'+1 \\ y = 2y'+4 \end{cases}$$

Applico l'inversa all'equazione della circonferenza:

$$(x+1-1)^2 + (2y+4-1)^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{9} = 1$$



Si tratta di un'ellisse di centro $\left(0;\ -\frac{3}{2}\right)$ e semiassi 3 e $\frac{3}{2}$, perciò di area: $\mathcal{A} = 3 \cdot \frac{3}{2}\pi = \boldsymbol{\frac{9}{2}\pi}$

3. Scrivi l'equazione delle similitudini dirette, di rapporto $\sqrt{10}$, che hanno il punto $\left(-\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$ come punto unito e trasformano l'origine in un punto dell'asse x.

Le generiche equazioni della similitudine sono:

$$\begin{cases} x' = ax - by + c_1 \\ y' = bx + ay + c_2 \end{cases}$$

Il rapporto è dato dalla radice quadrata del determinante del sistema ($det = a^2 + b^2$), mentre le altre tre condizioni sono: $x = x' = -\frac{4}{5}$, $y = y' = \frac{2}{5}$ e $y' = 0 \wedge x = y = 0$, visto che l'origine viene trasformata in un punto dell'asse x:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ -\frac{4}{5} = -\frac{4}{5}a - \frac{2}{5}b + c_1 \\ \frac{2}{5} = -\frac{4}{5}b + \frac{2}{5}a + c_2 \\ 0 = 0 + 0 + c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = 0 \\ 4a + 2b - 5c_1 = 4 \\ 2a - 4b = 2 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$

Risolvendo solo le ultime due equazioni ottengo:

$$\begin{cases} a = 2b + 1 \\ 4b^2 + 4b + 1 + b^2 = 10 \end{cases} \qquad 5b^2 + 4b - 9 = 0 \qquad b_{1,2} = \frac{-2 \pm 7}{5} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{9}{5} \\ 1 \end{matrix} \right.$$

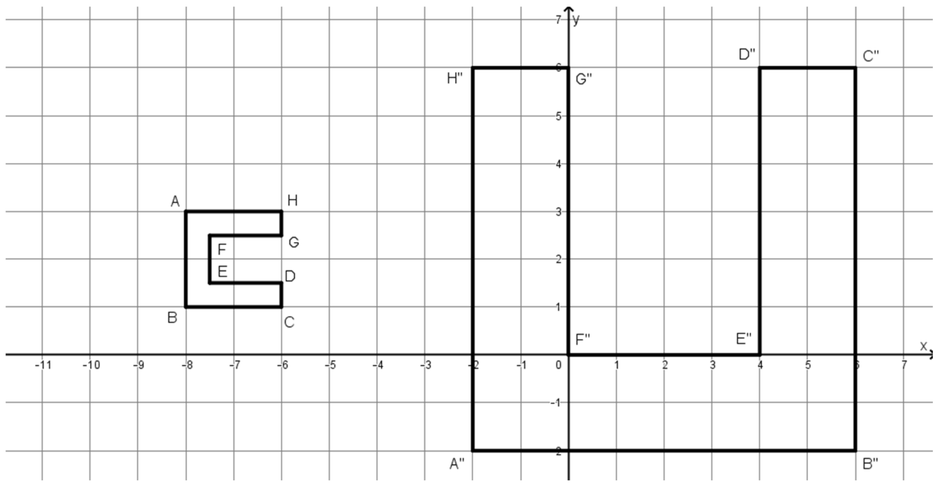
Abbiamo quindi due soluzioni:

$$\begin{cases} a = -\frac{13}{5} \\ b = -\frac{9}{5} \\ c_1 = -\frac{18}{5} \\ c_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c_1 = 2 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

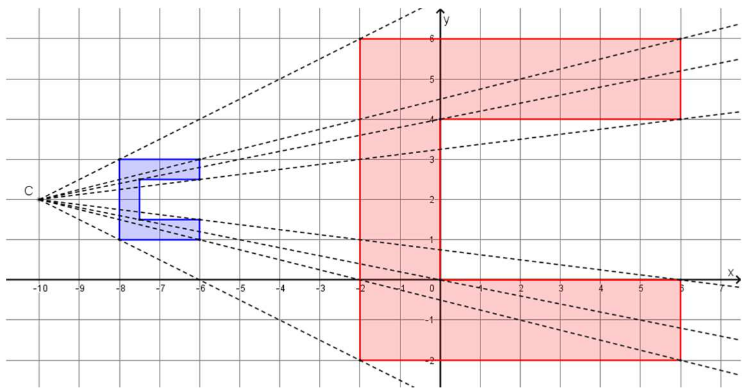
Ovvero le due similitudini sono:

$$\boldsymbol{\sigma_1}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = -\frac{13}{5}x + \frac{9}{5}y - \frac{18}{5}} \\ \boldsymbol{y' = -\frac{9}{5}x - \frac{13}{5}y} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\sigma_2}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = 3x - y + 2} \\ \boldsymbol{y' = x + 3y} \end{cases}$$

4. Osserva le due figure nell'immagine. Determina la trasformazione composta che ha trasformato la figura ABCDEFGH nella figura A"B"C"D"E"F"G"H", a partire dalle due trasformazioni elementari. Scrivi le equazioni della trasformazione e determina le coordinate del suo punto unito.



La prima trasformazione è un'omotetia che ingrandisce la figura di partenza di 4 volte, perciò è un'omotetia di rapporto 4. Per determinare il centro dell'omotetia, determino l'intersezione tra le rette AH" e BA":



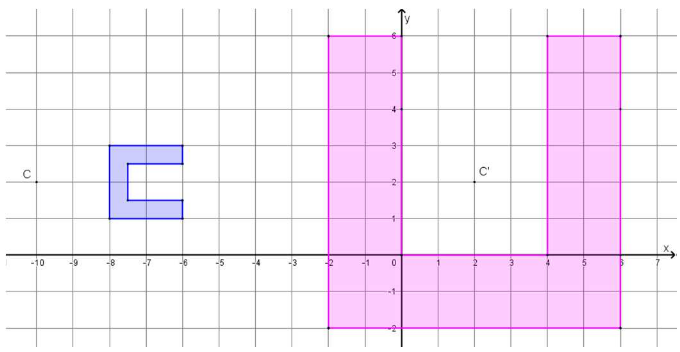
$$\begin{cases} \dfrac{x+8}{-2+8} = \dfrac{y-3}{6-3} \\ \dfrac{x+8}{-2+8} = \dfrac{y-1}{-2-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y - 14 \\ y - 3 = -y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 14 \\ y = 2 \end{cases} \qquad C_\omega(-10; 2)$$

L'omotetia di centro C_ω e rapporto 4 ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = 4\,(x+10) - 10 \\ y' = 4\,(y-2) + 2 \end{cases} \qquad \omega: \begin{cases} x' = 4x + 30 \\ y' = 4y - 6 \end{cases}$$

La seconda trasformazione è una rotazione di 90° in senso antiorario, che ha centro nel centro del quadrato che racchiude la figura, ovvero nel punto $C'_r\ (2; 2)$:



$$r: \begin{cases} x' = -(y-2)\cdot 1 + 2 \\ y' = (x-2)\cdot 1 + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -y + 4 \\ y' = x \end{cases}$$

Componendo le due trasformazioni:

$$r \circ \omega: \begin{cases} x' = -4y + 6 + 4 \\ y' = 4x + 30 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\begin{cases} x' = -4y + 10 \\ y' = 4x + 30 \end{cases}}$$

Determino le coordinate del punto unito:

$$\begin{cases} x = -4y + 10 \\ y = 4x + 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4y + 10 \\ y = -16y + 40 + 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4y + 10 \\ 17y = 70 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{110}{17} \\ y = \dfrac{70}{17} \end{cases} \qquad \boldsymbol{U\left(-\frac{110}{17}; \frac{70}{17}\right)}$$