1. Una trasformazione ha equazioni $\begin{cases} x' = 2x - y + a \\ y' = 4ax + by \end{cases}$. Determina i parametri a e b in modo che $P\ (1;\ 2)$ sia un punto unito. Per i valori così determinati di a e b scrivi le equazioni della trasformazione inversa..

Sostituisco le coordinate di P nella trasformazione, l'ascissa al posto di x e di x', l'ordinata al posto di y e di y', trattandosi di un punto unito:

$$\begin{cases} 1 = 2 - 2 + a \\ 2 = 4a + 2b \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = 1} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases}$$

Le equazioni della trasformazione diventano: $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 4x - y \end{cases}$

Il determinante della trasformazione vale 2. Calcolo gli altri due determinanti con la regola di Cramer:

$$D_x = \begin{vmatrix} x' - 1 & -1 \\ y' & -1 \end{vmatrix} = -x' + 1 + y' \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & x' - 1 \\ 4 & y' \end{vmatrix} = 2y' - 4x' + 4$$

La trasformazione inversa ha quindi equazioni:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{y = -2x' + y' + 2} \end{cases}$$

2. Determina i parametri a e b in modo che i punti $A\ (a + 2b - 1; 2a - b)$ e $A'(3 - a; 1 + b)$ siano tra loro simmetrici rispetto all'origine.

Se i due punti sono simmetrici rispetto all'origine significa che il punto medio del segmento AA' coincide con l'origine:

$$\begin{cases} \dfrac{a + 2b - 1 + 3 - a}{2} = 0 \\ \dfrac{2a - b + 1 + b}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b + 2 = 0 \\ 2a + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = -\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases}$$

3. Verifica che la retta di equazione $y = mx + 1 - m$ è unita nella simmetria di centro $C(1; 1)$, per qualsiasi valore reale di m. Perché?

La simmetria rispetto al punto C ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$$

Applico le trasformazioni inverse alla retta e verifico che ottengo la stessa retta di partenza:

$$2 - y = m\,(2 - x) + 1 - m$$

$$-y = 2m - mx + 1 - m - 2 \qquad y = mx - m + 1$$

Questo si verifica perché in una simmetria centrale le rette unite sono quelle passanti per il centro di simmetria e il centro di simmetria appartiene alla retta data.

4. Individua il punto rispetto al quale le due circonferenze di equazione $x^2+y^2-2y=0$ e $x^2+y^2+14y+48=0$ sono una simmetrica dell'altra.

Determino innanzi tutto il centro di entrambe le circonferenze:

$$C_1\ (0;1) \qquad C_2\ (0;-7)$$

Determino il punto medio dei due centri e, in questo modo, ho il centro di simmetria:

$$C\ \left(\frac{0+0}{2};\frac{1-7}{2}\right)=\boldsymbol{C(0;\ -3)}$$

5. Determina i valori dei parametri a e b in modo che le parabole di equazioni $y=(a-3)\,x^2+bx-1$ e $y=(2a+1)\,x^2+$ $+2ax-1$ siano una la simmetrica dell'altra rispetto all'asse y.

La simmetria rispetto all'asse y ha equazioni:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$$

Applico le trasformazioni alla seconda equazione e pongo i coefficienti della seconda uguali ai coefficienti della prima:

$$y=(2a+1)\,x^2-2ax-1$$

$$\begin{cases} a-3=2a+1 \\ b=-2a \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a=-4} \\ \boldsymbol{b=8} \end{cases}$$

6. Verifica che l'iperbole omografica $y=\frac{ax+b}{x+c}$ è simmetrica rispetto al suo centro.

Il centro dell'iperbole ha coordinate: $C\ (-c;\ a\ )$ e quindi la simmetria centrale ha equazioni:

$$\begin{cases} x'=-2c-x \\ y'=2a-y \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2c-x' \\ y=2a-y' \end{cases}$$

Applico la trasformazione all'equazione dell'iperbole e verifico che risulta la stessa iperbole di partenza:

$$2a-y=\frac{-2ac-ax+b}{-2c-x+c}$$

$$-y=\frac{-2ac-ax+b+2ac+2ax}{-x-c}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{ax+b}{x+c}}$$

c.v.d.

7. Verifica analiticamente che la retta di equazione $ax+by+c=0$ è unita nella traslazione di vettore $\vec{v}\ (-b;a)$.

La traslazione ha equazioni: $\begin{cases} x'=x-b \\ y'=y+a \end{cases}$, mentre quella inversa ha equazioni: $\begin{cases} x=x'+b \\ y=y'-a \end{cases}$

Applico la trasformazione all'equazione della retta e verifico che ottengo la stessa retta di partenza:

$$a\,(x+b)+b\,(y-a)+c=0 \qquad ax+ab+by-ab+c=0$$

$$\boldsymbol{ax+by+c=0}$$

c.v.d.

8. Una parabola, di equazione $y = x^2 + 3x - 4$, è sottoposta a una traslazione di vettore $\vec{v}\,(a; 2-a)$. Determina a in modo che la parabola trovata abbia il vertice sulla retta di equazione $y = x + 1$.

Determino il vertice della parabola: $V\left(-\frac{3}{2}; -\frac{25}{4}\right)$.

Applico la traslazione di equazioni: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + 2 - a \end{cases}$ al vertice: $V'\left(-\frac{3}{2} + a;\ -\frac{25}{4} + 2 - a\right) = \left(-\frac{3}{2} + a;\ -\frac{17}{4} - a\right)$

Le coordinate del vertice traslato devono soddisfare l'equazione della retta data, perciò basta sostituire le coordinate nell'equazione della retta e determineremo il valore del parametro a:

$$-\frac{17}{4} - a = -\frac{3}{2} + a + 1 \qquad 2a = -\frac{17}{4} + \frac{3}{2} - 1 \qquad \boldsymbol{a = -\frac{15}{8}}$$

9. Un'omotetia trasforma il punto $A\,(0;4)$ nel punto $A'(2;2)$, mentre l'immagine di $B\,(-6;2)$ appartiene all'asse delle y. Determina centro e rapporto dell'omotetia.

Le generiche equazioni dell'omotetia sono:

$$\begin{cases} x' = k\,(x - x_C) + x_C \\ y' = k\,(y - y_C) + y_C \end{cases}$$

Applico le trasformazioni al punto A e ottengo il punto A' e determino l'ordinata di B':

$$\begin{cases} 2 = k\,(0 - x_C) + x_C \\ 2 = k\,(4 - y_C) + y_C \\ 0 = k\,(-6 - x_C) + x_C \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = 6k \\ 0 = k\,(-6 - x_C) + x_C \\ 2 = k\,(4 - y_C) + y_C \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ 0 = -2 + \frac{2}{3}x_C \\ 2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}y_C \end{cases} \qquad \boldsymbol{\begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ x_C = 3 \\ y_C = 1 \end{cases}}$$

10. Data la parabola di equazione $y = 2x^2 + 5$, trasformala, con un'opportuna similitudine diretta, nella parabola di equazione $y = x^2$.

Le generiche equazioni della similitudine sono: $\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$

Applico le trasformazioni alla seconda equazione:

$$bx + ay + c' = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 - 2abxy + 2acx - 2bcy$$

$$(a + 2bc)\,y = a^2x^2 + b^2y^2 + x\,(2ac - b) - 2abxy + c^2 - c'$$

$$y = \frac{a^2}{a + 2bc}x^2 + \frac{b^2}{a + 2bc}y^2 + x\frac{2ac - b}{a + 2bc} - \frac{2ab}{a + 2bc}xy + \frac{c^2 - c'}{a + 2bc}$$

Perché le due equazioni siano uguali, posso porre uguali i coefficienti:

$$\begin{cases} b^2 = 0 \\ \frac{a^2}{a + 2bc} = 2 \\ 2ac - b = 0 \\ \frac{c^2 - c'}{a + 2bc} = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ \frac{a^2}{a} = 2 \\ 2ac = 0 \\ \frac{c^2 - c'}{a} = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \\ c = 0 \\ \frac{-c'}{2} = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ c' = -10 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y - 10 \end{cases}}$$