1. Due corpi A e B urtano fra loro su un piano con attrito trascurabile. Prima dell'urto, la quantità di moto di A è data da $\vec{q}_{i_A} = (2\ kg\ m/s)\ \hat{x} + (3\ kg\ m/s)\ \hat{y}$ e quella di B da $\vec{q}_{i_B} = (-4\ kg\ m/s)\ \hat{x} + (2\ kg\ m/s)\ \hat{y}$. Dopo l'urto la quantità di moto di B è: $\vec{q}_{f_B} = (1\ kg\ m/s)\ \hat{x} + (2\ kg\ m/s)\ \hat{y}$. Se la massa di A è $1{,}2\ kg$, qual è il modulo della sua velocità dopo l'urto?

$$\vec{q}_{i_A} = (2\ kg\ m/s)\hat{x} + (3\ kg\ m/s)\hat{y} \qquad \vec{q}_{i_B} = (-4\ kg\ m/s)\hat{x} + (2\ kg\ m/s)\hat{y}$$
$$\vec{q}_{f_B} = (1\ kg\ m/s)\hat{x} + (2\ kg\ m/s)\hat{y} \qquad m_A = 1{,}2\ kg \qquad v_{f_A}?$$

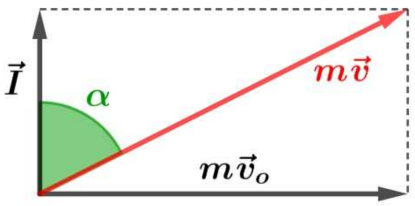
Per la conservazione della quantità di moto: $\vec{q}_{i_A} + \vec{q}_{i_B} = \vec{q}_{f_A} + \vec{q}_{f_B}$, perciò: $\vec{q}_{f_A} = \vec{q}_{i_A} + \vec{q}_{i_B} - \vec{q}_{f_B}$.

Per la definizione di quantità di moto, $\vec{q} = m\vec{v}$, perciò:

$$v_{f_A} = \frac{q_{f_A}}{m_A} = \frac{|\vec{q}_{i_A} + \vec{q}_{i_B} - \vec{q}_{f_B}|}{m_A} = \frac{|(-3\ kg\ m/s)\hat{x} + (3\ kg\ m/s)\hat{y}|}{m_A} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 3^2}}{m_A} kg\ m/s = \mathbf{3{,}5\ m/s}$$

2. Un disco da hockey di $160\ g$ si muove sul ghiaccio con una velocità v_o quando riceve un impulso di $3{,}0\ kg\ m/s$ in direzione perpendicolare alla direzione del moto. Sapendo che l'angolo formato dall'impulso con la velocità finale è di $60°$, determina la velocità iniziale e quella finale del disco.

$$m = 0{,}160\ kg \qquad I = 3{,}0\ kg\ m/s \qquad \alpha = 60° \qquad v_o? \qquad v?$$



Per il teorema dell'impulso: $\vec{I} = m\vec{v} - m\vec{v}_o$, che possiamo anche scrivere come $m\vec{v} = \vec{I} + m\vec{v}_o$, e quindi possiamo rappresentarlo come indicato a lato. Dalla figura ricaviamo

$$mv_o = I \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad v_o = \frac{I \tan\alpha}{m} = \mathbf{32\ m/s}$$

E infine:

$$I = mv\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{m\cos\alpha} = \mathbf{38\ m/s}$$

3. Un carrello di $45\ kg$ si muove a $0{,}50\ m/s$ su rotaie e transita sotto un tubo dal quale scende sabbia in verticale, che si accumula sul pianale. Sapendo che la velocità finale del carrello è di $0{,}45\ m/s$, qual è la massa della sabbia scesa nel carrello?

$$M = 45\ kg \qquad v = 0{,}50\ m/s \qquad V = 0{,}45\ m/s \qquad m?$$

Se consideriamo solo il moto lungo la rotaia, per la conservazione della quantità di moto:

$$Mv = (m + M)\,V \quad \Rightarrow \quad m + M = M\frac{v}{V} \quad \Rightarrow \quad m = M\frac{v}{V} - M = \mathbf{5{,}0\ kg}$$

4. Un carrellino di massa m_1 si muove lungo una guida ad aria compressa con velocità $0{,}90\ m/s$ e urta elasticamente un secondo carrellino, di massa $m_2 = 0{,}20\ kg$, che procede in verso opposto con una velocità di modulo $1{,}9\ m/s$. A seguito dell'urto i carrellini invertono i versi di marcia e il secondo carrellino acquista una velocità di $2{,}1\ m/s$. Determina la massa del primo carrellino e la sua velocità finale.

$$v_1 = 0{,}90\ m/s \qquad m_2 = 0{,}20\ kg \qquad v_2 = -1{,}9\ m/s \qquad V_2 = 2{,}1\ m/s \qquad m_1? \qquad V_1?$$

Trattandosi di un urto in un sistema isolato, vale la conservazione della quantità di moto e, visto che l'urto è elastico, si conserva anche l'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2) \end{cases}$$

Dividendo la seconda equazione per la prima, e usando poi la prima equazione, posso determinare i dati richiesti:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1(v_1 - V_1)(v_1 + V_1)}{m_1(v_1 - V_1)} = \dfrac{m_2(V_2 - v_2)(V_2 + v_2)}{m_2(V_2 - v_2)} \\ m_1 = m_2\dfrac{V_2 - v_2}{v_1 - V_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + V_1 = v_2 + V_2 \\ m_1 = m_2\dfrac{V_2 - v_2}{v_1 - V_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = v_2 + V_2 - v_1 = \mathbf{-0{,}70\ m/s} \\ m_1 = m_2\dfrac{V_2 - v_2}{v_1 - V_1} = \mathbf{0{,}50\ kg} \end{cases}$$

5. Un proiettile di massa m urta in modo totalmente anelastico un bersaglio di massa M, inizialmente fermo. Sapendo che durante l'urto si perde l'80% dell'energia cinetica, determina il rapporto M/m.

$$\frac{K_2 - K_1}{K_1} = -\frac{80}{100} \quad o \quad K_2 = \frac{20}{100}K_1 \quad M/m?$$

Trattandosi di un urto totalmente anelastico, posso scrivere la conservazione della quantità di moto e ricavare la velocità finale di proiettile e bersaglio dopo l'urto:

$$mv = (m+M)\,V \quad \Rightarrow \quad V = v\frac{m}{m+M}$$

Esplicito la variazione percentuale dell'energia cinetica:

$$K_2 = \frac{1}{5}K_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m+M)\,V^2 = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad (m+M)\,v^2\frac{m^2}{(m+M)^2} = \frac{mv^2}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{m+M} = \frac{1}{5}$$

Posso quindi determinare il rapporto tra le masse, passando ai reciproci:

$$\frac{m+M}{m} = 5 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{M}{m} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{m} = \mathbf{4}$$

6. Due biglie si stanno muovendo lungo la stessa retta e nello stesso verso: la prima ha massa m e si muove con velocità $v_1 = 4{,}0\ m/s$; la seconda ha massa $2m$ e si muove con velocità v_2. Dopo l'urto, la prima massa devia dalla sua direzione di un angolo $\alpha_1 = 30°$, mentre la seconda devia di un angolo $\alpha_2 = 60°$ e si muove con una velocità di modulo $V_2 = 1{,}0\ m/s$. Determina il modulo della velocità finale della prima biglia, V_1, e verifica che la seconda biglia aveva velocità iniziale nulla prima dell'urto.

$$m_1 = m \quad v_1 = 4{,}0\ m/s \quad m_2 = 2m \quad \alpha_1 = 30° \quad \alpha_2 = 60° \quad V_2 = 1{,}0\ m/s \quad V_1? \quad v_2?$$

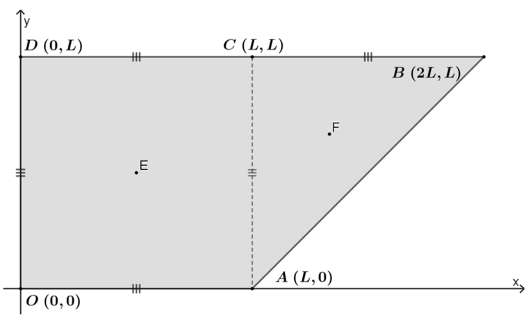
Scrivo la legge di conservazione della quantità di moto lungo i due assi, considerando la velocità iniziale lungo l'asse x:

$$\begin{array}{l} asse\ x: \\ asse\ y: \end{array} \begin{cases} mv_1 + 2mv_2 = mV_1\cos\alpha_1 + 2mV_2\cos\alpha_2 \\ 0 = mV_1\sin\alpha_1 - 2mV_2\sin\alpha_2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricavo V_1 e, sostituendo il valore trovato nella prima equazione, determino v_2:

$$V_1 = 2V_2\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \mathbf{3,5\ m/s} \qquad v_2 = \frac{V_1\cos\alpha_1 + 2V_2\cos\alpha_2 - v_1}{2} = \mathbf{0\ m/s}$$

7. La figura mostra una lamina metallica avente massa m distribuita uniformemente. La lastra è costituita da un quadrato di lato L al quale è aggiunto un triangolo rettangolo isoscele. Determina la posizione del centro di massa della lastra rispetto al vertice in basso a sinistra.



Inserisco la lamina in un piano cartesiano la cui origine coincide con il vertice in basso a sinistra. I vertici hanno le coordinate indicate in figura. Considero separatamente il quadrato e il triangolo isoscele, il primo con massa $\frac{2}{3}m$ e il secondo $\frac{1}{3}m$. Nel caso del quadrato, il centro di massa è dato dal punto di incontro delle diagonali di coordinate $E\left(\frac{L}{2};\frac{L}{2}\right)$. Il centro di massa del triangolo può essere determinato con la regola del baricentro:

$$F\left(\frac{L+2L+L}{3};\frac{L+L+0}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}L;\frac{2}{3}L\right)$$

Considero la massa del quadrato e del triangolo come se fosse concentrata nel proprio centro di massa. Perciò posso determinare le coordinate del centro di massa:

$$x_{CM} = \frac{\frac{2}{3}mx_E + \frac{1}{3}mx_F}{m} = \frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}L = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{L} \qquad y_{CM} = \frac{\frac{2}{3}my_E + \frac{1}{3}my_F}{m} = \frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}L = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{L}$$