1. Applica la definizione, dopo averla enunciata, e determina l'equazione della parabola, dati il fuoco $F\ (4;1)$ e la direttrice $x=0$.

Assegnati nel piano un punto F (fuoco) e una retta d (direttrice), la parabola è la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d. Sia P un punto di coordinate generiche $P(x;y)$. Applicando la definizione:

$$\overline{PF}=d(P,d) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=|x|$$

Elevando a quadrato entrambi i membri, ottengo l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x:

$$x^2-8x+16+y^2-2y+1=x^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{4}y+\frac{17}{8}}$$

2. Stabilisci per quali valori di a,b,c la parabola $y=ax^2+bx+c$:

A. ha vertice sull'asse x: in altre parole, l'ordinata del vertice ha ordinata nulla, ovvero: $-\frac{\Delta}{4a}=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b^2-4ac=0}$

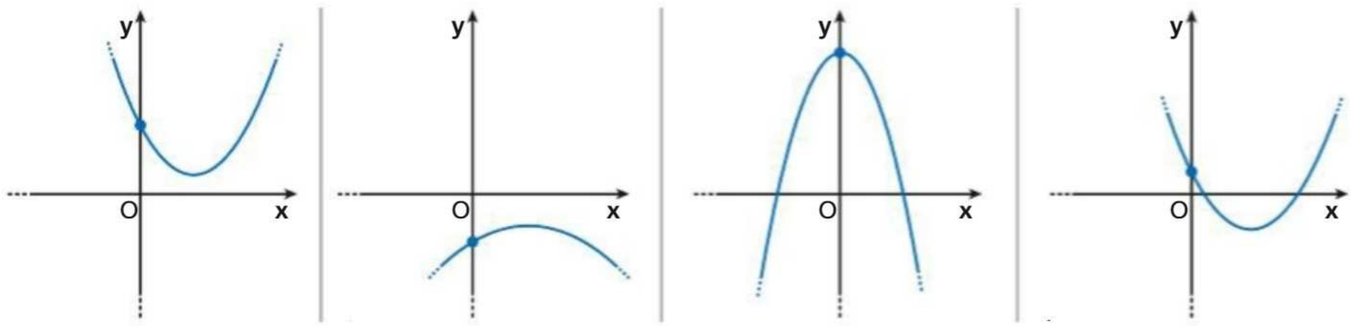
B. rivolge la concavità verso il basso e passa per l'origine: $\boldsymbol{a<0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{c=0}$

C. ha vertice nell'origine: $\boldsymbol{b=c=0}$

D. ha come asse di simmetria la retta $x=2$:

la generica equazione dell'asse di simmetria è $x=-\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{2a}=2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b=-4a}$

3. Indica il segno di a,b,c nell'equazione $y=ax^2+bx+c$ per ciascuna delle parabole rappresentate:



$a>0 \quad b<0 \quad c>0$ $\qquad$ $a<0 \quad b>0 \quad c<0$ $\qquad$ $a<0 \quad b=0 \quad c>0$ $\qquad$ $a>0 \quad b<0 \quad c>0$

4. Per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $y=(k+3)\,x^2+(k-1)\,x+2k-1$:

A. rappresenta una parabola: $k+3\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k\neq -3}$

B. la parabola passa per l'origine: $2k-1=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$

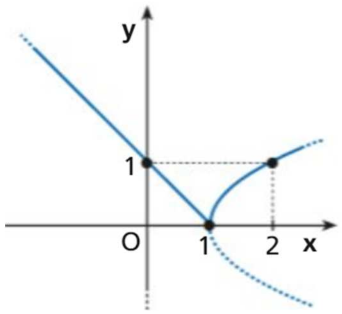
C. la parabola ha il vertice sull'asse y: $k-1=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=1}$

D. la parabola ha come asse di simmetria la retta $x=2$: $-\frac{k-1}{2(k+3)}=2 \quad \Rightarrow \quad k-1=-4k-12 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=-\frac{11}{5}}$

E. la parabola passa per il punto $P\ (1;0)$: per determinare il valore del parametro, sostituisco le coordinate del punto nell'equazione della parabola:

$$0=k+3+k-1+2k-1 \quad \Rightarrow \quad 4k=-1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=-\frac{1}{4}}$$

5. Trova l'equazione del grafico utilizzando i dati della figura, in cui l'arco rappresentato appartiene a una parabola:



Determino l'equazione della retta, che è parallela alla bisettrice di secondo e quarto quadrante e ha ordinata all'origine uguale a 1:

$$y = -x + 1$$

Determino l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, quindi di equazione generica $x = ay^2 + by + c$, con $b = 0$, dato che ha asse coincidente con l'asse x, e $c = 1$, dato dall'intersezione con l'asse x. Posso poi usare le coordinate del punto $(2; 1)$:

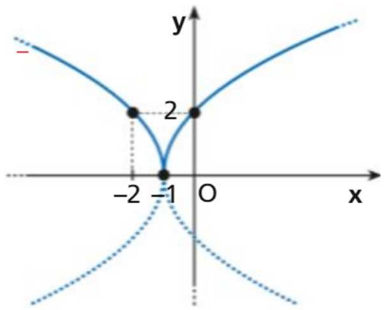
$$x = ay^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = a + 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$x = y^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x - 1}$$

L'equazione della funzione è:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} 1 - x & se\ x \leq 1 \\ \sqrt{x - 1} & se\ x > 1 \end{cases}}$$

6. Trova l'equazione del grafico utilizzando i dati della figura, in cui gli archi rappresentati appartengo a parabole:



Le due parabole hanno asse coincidente con l'asse x, quindi $b = 0$ e intersecano l'asse x nel punto di ascissa -1, perciò $c = -1$. Partendo dall'equazione generica $x = ay^2 - 1$, impongo il passaggio prima per il punto $(-2; 2)$ per l'arco a sinistra e per il punto $(0; 2)$ per l'arco a destra:

$$(-2; 2): \ -2 = 4a - 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}y^2 - 1$$

$$(0; 2): \ 0 = 4a - 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}y^2 - 1$$

I due archi rappresentati hanno equazione:

$$x = -\frac{1}{4}y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -4x - 4 \quad \Rightarrow \quad y = 2\sqrt{-x - 1}$$

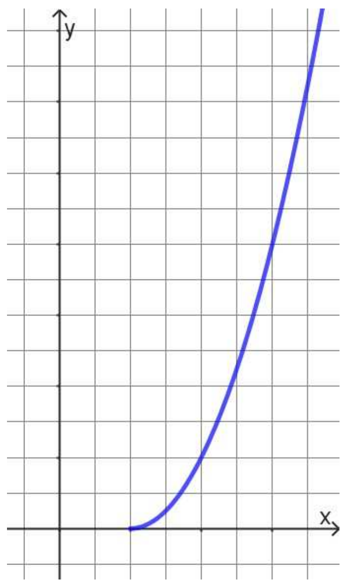
$$x = \frac{1}{4}y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad y = 2\sqrt{x + 1}$$

L'equazione della funzione è:

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{-x - 1} & se\ x \leq -1 \\ 2\sqrt{x + 1} & se\ x > -1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{y = 2\sqrt{|x + 1|}}$$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni:

7. $x = 2 + \sqrt{2y}$



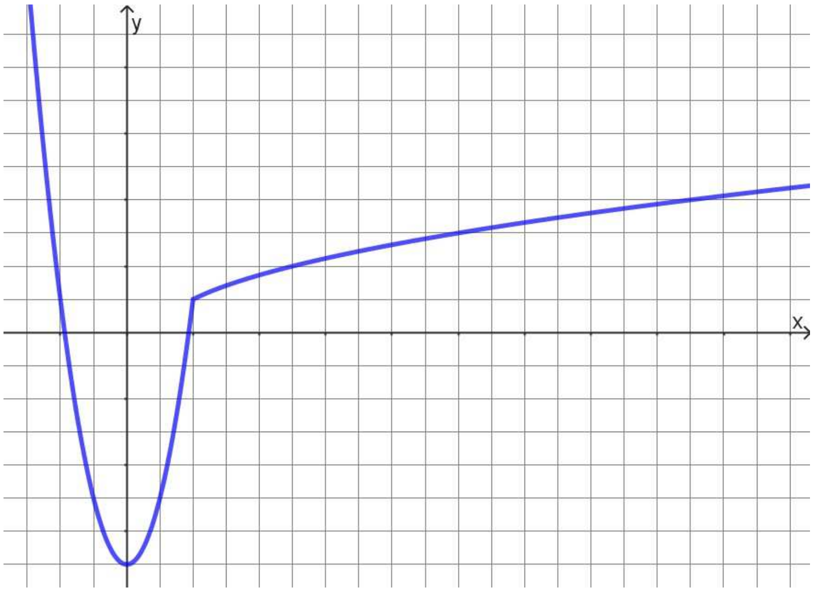
Dominio: $y \geq 0$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

Si tratta di un arco di parabola. La parabola di partenza ha vertice $V(2; 0)$ e asse di simmetria $x = 2$.

Si rappresenta l'arco di parabola per $x \geq 2$.

8. $y = \begin{cases} 2x^2 - 7 & se\ x < 2 \\ \sqrt{x-1} & se\ x \geq 2 \end{cases}$



Per la prima parte si rappresenta la parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse y e vertice $V(0; -7)$.

Per la seconda parte:
Dominio: $x \geq 1$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x = y^2 + 1 \end{cases}$$

Si tratta di un arco di parabola. La parabola di partenza ha vertice $V(1; 0)$ e asse di simmetria coincidente con l'asse x.
Si rappresenta l'arco di parabola contenuto nel primo quadrante, a partire da $x \geq 2$.