1. Considera le simmetrie centrali

$$s_1: \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \qquad s_2: \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = -y \end{cases}$$

Determina i loro centri M_1 e M_2. Trova poi $s_3 = s_2 \circ s_1$. Quale trasformazione hai ottenuto? Considera il punto $A\,(-1; 3)$, il suo simmetrico B rispetto a s_1 e C simmetrico di B rispetto a s_2. Calcola l'area del triangolo ABC.

La generica equazione di una simmetria è:

$$s: \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

con a e b coordinate del centro di simmetria. Perciò:

$$M_1\,(-2; 1) \qquad M_2\,(-1; 0)$$

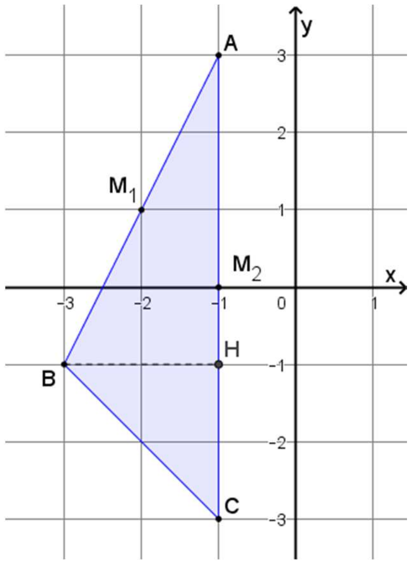
Compongo le due trasformazioni:

$$s_2 \circ s_1: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Quella ottenuta è una traslazione di vettore $\vec{v}\,(2;\,-2)$.

$$A\,(-8; 2) \xrightarrow{s_1} B(-3;\,-1)$$
$$A\,(-8; 2) \xrightarrow{s_2} C(-1;\,-3)$$

Ora posso rappresentare il triangolo:



La distanza del punto B dal segmento AC (ovvero l'altezza del triangolo rispetto alla base AC), si ottiene facendo la differenza in valore assoluto tra l'ascissa di B e quella di C (o di A, che è la stessa cosa): $h = |x_B - x_C| = |-3 + 1| = 2$. La base $\overline{AC} = |y_A - y_C| = |3 + 3| = 6$.
L'area ha quindi valore: $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{6 \cdot 2}{2} = \mathbf{6}$

2. Tra le affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = bx - 3 \\ y' = (b-4)\,x + (a-2)\,y \end{cases} \qquad a \neq 0$$

mostra che c'è un'omotetia e, rispetto a questa, determina le equazioni dell'immagine corrispondente alla circonferenza di centro $C\,(2; 1)$ e raggio $\sqrt{2}$. Riconosci la curva ottenuta e determina l'area da essa racchiusa.

La generica equazione di un'omotetia è:

$$\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$

Perciò si ottiene:

$$\begin{cases} b - 4 = 0 \\ a - 2 = b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 4x - 3 \\ y' = 4y \end{cases} \qquad inversa: \begin{cases} x = \frac{1}{4}x' + \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4}y' \end{cases}$$

Applico l'inversa all'equazione della circonferenza:

$$\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}y - 1\right)^2 = 2$$

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 32$$

Si tratta di una circonferenza di centro $(5;\,4)$ e raggio $4\sqrt{2}$, perciò di area: $\mathcal{A} = \pi r^2 = \mathbf{32\,\pi}$

3. Date le equazioni

$$\begin{cases} x' = 2ax + (a-3)\,y \\ y' = (-a-3)\,x + ay + 2 - a \end{cases}$$

A. Determina per quali valori di a si ha un'affinità, un'affinità diretta o indiretta, un'equivalenza.
B. Trova per quali valori di a si ha una similitudine σ; studia σ individuando anche gli elementi uniti.

A. Perché si tratti di un'affinità, il determinante dev'essere diverso da zero:

$$2a^2 - (a-3)(-a-3) \neq 0 \qquad 3a^2 - 9 \neq 0 \qquad \boldsymbol{a \neq \pm\sqrt{3}}$$

Perché si tratti di un'affinità diretta, il determinante dev'essere maggiore di zero:

$$DIRETTA: \quad 3a^2 - 9 > 0 \qquad \boldsymbol{a < -\sqrt{3} \quad \vee \quad a > \sqrt{3}}$$

$$INVERSA: \quad 3a^2 - 9 < 0 \qquad \boldsymbol{-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}}$$

Perché si tratti di un'equivalenza, il determinante dev'essere uguale, in valore assoluto, a uno:

$$3a^2 - 9 = \pm 1 \qquad \boldsymbol{a = \pm\frac{\sqrt{30}}{3} \quad \vee \quad a = \pm\frac{2}{3}\sqrt{6}}$$

B. La similitudine ha generica equazione:

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \quad oppure \quad \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases}$$

perciò:

$$\begin{cases} 2a = a \\ -a - 3 = -a + 3 \end{cases} \quad oppure \quad \begin{cases} 2a = -a \\ -a - 3 = a - 3 \end{cases}$$

Il primo sistema è impossibile, mentre il secondo ha soluzione $a = 0$, perciò l'equazione della similitudine è:

$$\begin{cases} x' = -3y \\ y' = -3x + 2 \end{cases}$$

Determino il punto unito:

$$\begin{cases} x = -3y \\ y = -3x + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3y \\ y = 9y + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \boldsymbol{U\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)}$$

Determino le equazioni delle rette unite, applicando alla generica retta la trasformazione ottenuta:

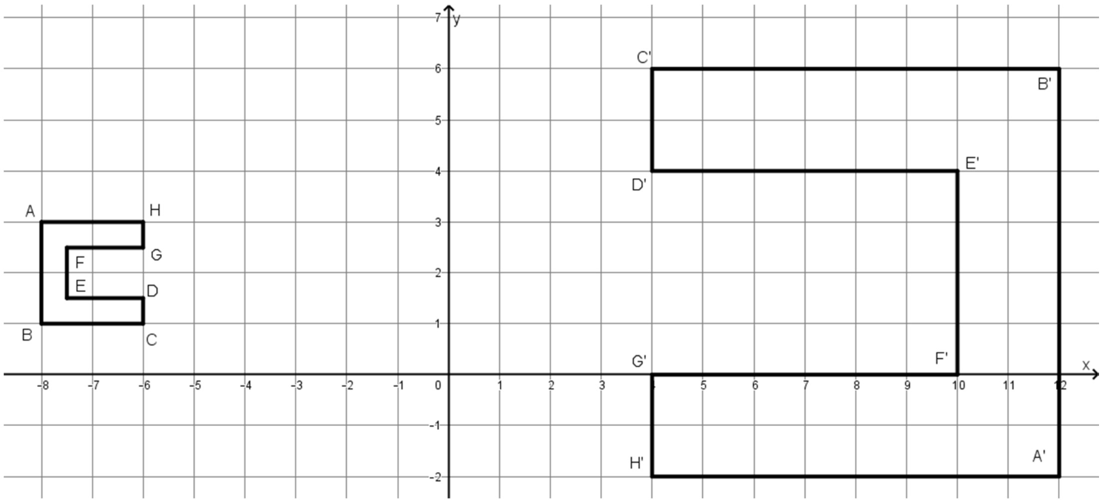
$$y = mx + q: \qquad -3x + 2 = -3my + q \qquad y = \frac{1}{m}x - \frac{2}{3m} + \frac{q}{3m}$$

$$m = \frac{1}{m} \qquad m^2 = 1 \qquad m = \pm 1$$

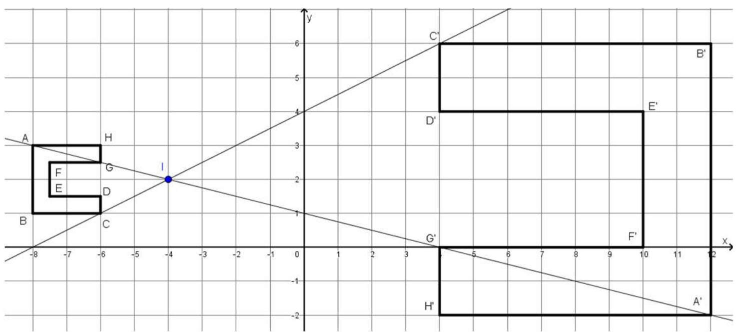
$$m = 1: \quad -\frac{2}{3} + \frac{q}{3} = q \qquad q = -1 \qquad \boldsymbol{y = x - 1}$$

$$m = -1: \quad \frac{2}{3} - \frac{q}{3} = q \qquad q = \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{y = -x + \frac{1}{2}}$$

4. Osserva le due figure nell'immagine. Determina la trasformazione che ha trasformato la figura ABCDEFGH nella figura A"B"C"D"E"F"G"H". Scrivi le equazioni della trasformazione e determina le coordinate del suo punto unito.



La trasformazione è un'omotetia che ingrandisce la figura di partenza di 4 volte, perciò è un'omotetia di rapporto 4. Per determinare il centro dell'omotetia, determino l'intersezione tra le rette CC' e GG':



$$\begin{cases} \dfrac{x+6}{4+6} = \dfrac{y-1}{6-1} \\ \dfrac{x+6}{4+6} = \dfrac{y-\frac{5}{2}}{0-\frac{5}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y-8 \\ 2y-5 = -y+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y-8 \\ y = 2 \end{cases} \qquad I(-4;2)$$

L'omotetia di centro I e rapporto – 4 ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -4\,(x+4) - 4 \\ y' = -4\,(y-2) + 2 \end{cases} \qquad \omega\colon \begin{cases} x' = -4x - 20 \\ y' = -4y + 10 \end{cases}$$

Determino le coordinate del punto unito, che coincideranno con il centro dell'omotetia:

$$\begin{cases} x = -4x - 20 \\ y = -4y + 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x = -20 \\ 5y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{I\,(-4;2\,)}$$