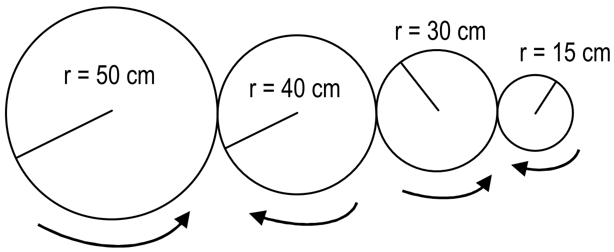
1. Un coleottero di massa 2,5 g si posa su un disco di vinile. Le sue zampette riescono a fissarsi al disco con una forza di $4{,}0 \cdot 10^{-3}\ N$. Il disco viene fatto ruotare a 33,3 giri/min. Calcola la massima distanza dal centro alla quale il coleottero rimane attaccato al disco.

La forza delle zampette sul disco deve essere pari alla forza centripeta. Eguagliando le due grandezze, otteniamo la massima distanza dal centro alla quale il coleottero rimane attaccato al disco:

$$F = ma_{cp} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

$$r = \frac{F}{m\omega^2} = \frac{4{,}0 \cdot 10^{-3}\ N}{2{,}5 \cdot 10^{-3} kg \cdot \left(33{,}3 \cdot \frac{2\pi}{60\ s}\right)^2} = \mathbf{13\ cm}$$

2. Quattro dischi ruotano insieme senza strisciare. Il disco di raggio 50 cm (figura 1) ha velocità angolare di 18 rad/s. Qual è la velocità angolare degli altri tre dischi?



I dischi hanno la stessa velocità tangenziale, che posso ricavare dalla velocità angolare del primo disco:

$$v = \omega r = 18 \frac{rad}{s} \cdot 0{,}50\ m = 9{,}0\ m/s$$

Posso ricavare quindi le altre velocità angolari, semplicemente dividendo la velocità tangenziale per il raggio:

$$\omega_2 = -\frac{v}{r_2} = -\frac{9{,}0\ m/s}{0{,}40\ m} = \mathbf{-23\ rad/s}$$

$$\omega_3 = \frac{v}{r_3} = \frac{9{,}0\ m/s}{0{,}30\ m} = \mathbf{30\ rad/s}$$

$$\omega_4 = -\frac{v}{r_4} = -\frac{9{,}0\ m/s}{0{,}15\ m} = \mathbf{-60\ rad/s}$$

3. Il piatto di un giradischi sta ruotando a 33,3 giri/min. Il giradischi viene spento e il piatto si ferma dopo 90 secondi. Supponi che l'accelerazione angolare sia costante. Quanto vale l'accelerazione angolare? Quanti giri effettua prima di fermarsi?

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{0 - 33{,}3 \cdot \frac{2\pi}{60\ s}}{90\ s} = \mathbf{-0{,}039\ rad/s^2}$$

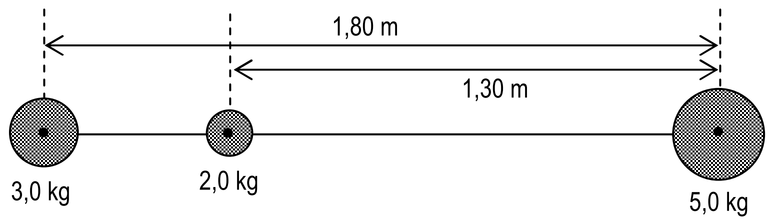
$$\vartheta = \frac{\omega + \omega_o}{2} t = \frac{\frac{33{,}3\ giri}{60\ s}}{2} \cdot 90s = \mathbf{25\ giri}$$

4. Un momento di 15 N m agisce su un disco che ha momento d'inerzia 48 kg m². Calcola l'accelerazione angolare del disco.

La seconda legge di Newton per il moto rotazionale è:

$$M = I\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{M}{I} = \frac{15\ Nm}{48\ kg\ m^2} = \mathbf{0,31\ rad/s^2}$$

5. Su un'asta di massa trascurabile sono fissate tre masse come in figura 2. Qual è il momento d'inerzia rispetto all'asse perpendicolare che passa per il centro di massa?



Consideriamo l'origine del sistema di riferimento nel centro della massa di 3,0 kg, perciò quella di 2,0 kg si trova in posizione 0,50 m e l'ultima – di 5,0 kg – nella posizione di 1,80 m. Calcoliamo quindi l'ascissa del centro di massa:

$$x_{CM} = \frac{2,0\ kg \cdot 0,50\ m + 5,0\ kg \cdot 1,80\ m}{3,0\ kg + 2,0\ kg + 5,0\ kg} = 1,0\ m$$

Ovvero il centro di massa si trova a 1,0 m dalla massa di 3,0 kg.
Calcolo quindi il momento d'inerzia:

$$I = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = 3,0\ kg \cdot (1,0\ m)^2 + 2,0\ kg \cdot (0,50\ m)^2 + 5,0\ kg \cdot (0,80\ m)^2 = \mathbf{6,7\ kg\ m^2}$$

6. Un'asta di massa 1,4 kg è lunga 1,8 m. Calcola la sua energia cinetica se ruota a 2,2 rad/s attorno al suo centro di massa. Come varia l'energia cinetica se ruota alla stessa velocità angolare attorno a un suo estremo?

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\omega^2 = \frac{1}{24}\cdot 1,4\ kg \cdot (1,8\ m)^2 \cdot (2,2\ rad/s)^2 = \mathbf{0,91\ J}$$

7. Una piccola sfera è lasciata rotolare senza strisciare dentro un contenitore di forma semisferica di raggio 0,500 m. Inizialmente la sfera è ferma. Calcola la velocità con cui transita nel punto più basso.

Applico la legge di conservazione dell'energia:

$$U_i + K_i = U_f + K_f \quad \Longrightarrow \quad U_i = K_f$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\frac{v^2}{r^2}$$

$$gR = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 = \frac{7}{10}v^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10}{7}gR} = \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 9,81\ m/s^2 \cdot 0,500\ m} = \mathbf{2,65\ m/s}$$

8. Una pattinatrice, tenendo le braccia in posizione orizzontale, ruota su se stessa con una velocità angolare uguale a 14,0 rad/s, allorché in un certo istante abbassa le braccia portandole a contatto con il corpo. Sapendo che nella nuova configurazione il momento d'inerzia della pattinatrice rispetto all'asse di rotazione diminuisce del 30%, calcola la nuova velocità angolare. Quanti giri compie, per unità di tempo, in ciascuna delle due posizioni considerate?

Per la conservazione del momento angolare:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{I_i \omega_i}{I_f}$$

Visto che il momento d'inerzia diminuisce del 30 %, so che: $I_f = \frac{7}{10} I_i$

$$\omega_f = \frac{I_i \omega_i}{\frac{7}{10} I_i} = \frac{10}{7} \omega_i = \frac{10}{7} \cdot 14{,}0\, rad/s = \mathbf{20,0\ rad/s}$$

Determino il numero di giri nell'unità di tempo in entrambi i casi:

$$\omega_i = \frac{14{,}0\, rad/s}{2\pi} = \mathbf{2,23\ giri/s} \qquad \omega_f = \frac{20{,}0\, rad/s}{2\pi} = \mathbf{3,18\ giri/s}$$

9. Un'elica lunga 2 m ha un momento di inerzia di 20 kg m^2. Un motore applica all'elica, inizialmente in quiete, un momento di 1000 N m. Calcola, trascurando gli attriti, quale velocità angolare raggiunge in 10 s e quanto tempo impiega il motore per portare la frequenza di rotazione a 1000 giri al minuto.

A partire dalla seconda legge di Newton per il moto rotazionale, ricavo l'accelerazione angolare:

$$M = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{M}{I}$$

Perciò, per determinare la velocità angolare raggiunta in 10 s, applico la legge oraria della velocità:

$$\omega = \omega_o + \alpha t = \frac{M}{I} t = \frac{1000\, Nm}{20\, kg\, m^2} \cdot 10s = \mathbf{5 \cdot 10^2\ rad/s}$$

Sempre con la legge oraria della velocità, determino il tempo per raggiungere una velocità angolare di 1000 giri al minuto:

$$\omega = \omega_o + \alpha t = \frac{M}{I} t \quad \Rightarrow \quad t = \omega \cdot \frac{I}{M} = 1000 \cdot \frac{2\pi}{60\, s} \cdot \frac{20\, kg\, m^2}{1000\, Nm} = \mathbf{2,1\ s}$$

10. Federico fa rotolare una palla da basket sul pavimento con una velocità lineare costante v. Determina quale frazione dell'energia cinetica totale è sotto forma di energia cinetica rotazionale. Se raddoppi la velocità v, la frazione che hai ottenuto diminuisce, aumenta o resta costante? Motiva la tua risposta.

Determino innanzi tutto l'energia cinetica totale:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{5}{6} m v^2$$

$$m v^2 = \frac{6}{5} K \quad \Rightarrow \quad K_r = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{3} m v^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} K = \mathbf{\frac{2}{5} K}$$

Se la velocità raddoppia, la frazione **non cambia**, visto che è indipendente dalla velocità.