1. Applica la definizione di parabola come luogo geometrico, dopo averla enunciata, e determina l'equazione della parabola, dati il fuoco $F(p;q)$ e direttrice $d\colon y=-q$. Verifica poi che il vertice si trova sull'asse x.

Assegnati nel piano un punto F (fuoco) e una retta d (direttrice), la parabola è la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d. Sia P un punto di coordinate generiche $P(x;y)$. Applicando la definizione:

$$\overline{PF}=d(P,d) \quad\Rightarrow\quad \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=|y+q|$$

Elevando a quadrato entrambi i membri, ottengo l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x:

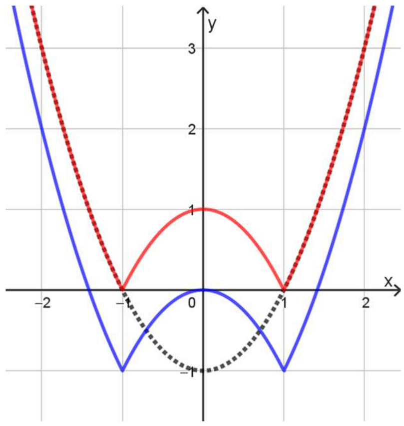
$$x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2=y^2+2qy+q^2 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{4q}x^2-\frac{p}{2q}x+\frac{p^2}{4q}}$$

L'equazione della parabola può essere scritta nella forma: $y=\frac{1}{4q}(x-p)^2$, quindi $\Delta=0$, perciò $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=0$. In altre parole, il vertice si trova sull'asse x.

2. Disegna il grafico **UNA** delle seguenti funzioni:

$$y=|x^2-1|-1 \qquad\qquad y=\sqrt{4+x-|x|}$$

$$y=|x^2-1|-1$$



Rappresento la parabola:

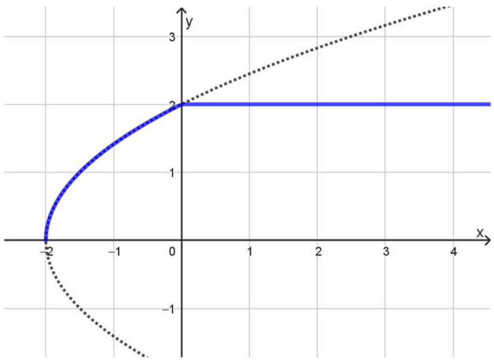
$$y=x^2-1$$

(il grafico tratteggiato in nero) con vertice $V(0,-1)$, poi ne rappresento il valore assoluto (ovvero: mantengo tutti i punti con ordinata positiva e considero i simmetrici rispetto all'asse x dei punti con ordinata negativa: il grafico rosso). Nel grafico definitivo (in blu), faccio una traslazione parallela all'asse y, verso il basso di un'unità.

Altrimenti posso esplicitare il valore assoluto, ottenendo:

$$y=\begin{cases} x^2-2 & se\ x\le -1 \quad\vee\quad x\ge 1 \\ -x^2 & se\ -1<x<1 \end{cases}$$

$$y=\sqrt{4+x-|x|}$$



Esplicitando il valore assoluto, ottengo:

$$y=\begin{cases} 2 & se\ x\ge 0 \\ \sqrt{4+2x} & se\ x<0 \end{cases}$$

La prima funzione è una retta parallela all'asse x, la seconda è un arco di parabola, con asse di simmetria coincidente con l'asse x, di vertice $V(-2,0)$, di equazione:

$$\begin{cases} -2\le x<0 \quad\wedge\quad y\ge 0 \\ x=\frac{1}{2}y^2-2 \end{cases}$$

3. Risolvi graficamente la seguente disequazione: $\sqrt{x+9}<|x+3|$

Rappresento la funzione: $y=|x+3|$, disegnando prima la retta $y=x+3$ e poi facendone il valore assoluto (nel grafico, in blu).

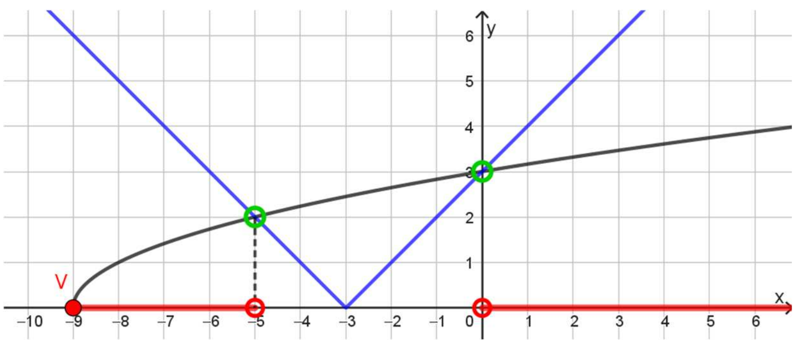
Rappresento poi l'arco di parabola $y=\sqrt{x+9}$:

$$\begin{cases} x\ge -9 \quad\wedge\quad y\ge 0 \\ x=y^2-9 \end{cases}$$

con vertice $V(-9;0)$ (nel grafico, in nero).

Dal grafico individuo le ascisse dei punti di intersezione e determino la soluzione:

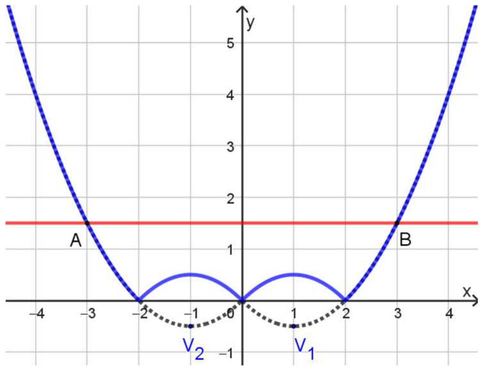
$$\boldsymbol{-9\le x<-5 \quad\vee\quad x>0}$$



4. Dopo aver rappresentato la funzione $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - |x|\right|$, determina la lunghezza della corda staccata su di essa dalla retta $y = \frac{3}{2}$.

Esplicitando il valore assoluto la funzione diventa:

$$y = \begin{cases} \left|\frac{1}{2}x^2 - x\right| & se\ x \geq 0 \\ \left|\frac{1}{2}x^2 + x\right| & se\ x < 0 \end{cases}$$



Si tratta di due rami di parabola. Preso senza valore assoluto, il primo ha vertice $V_1\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, mentre il secondo $V_2\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. Dopo aver rappresentato i due rami di parabola, ne faccio il valore assoluto e ottengo il grafico a lato (in blu).

In rosso, nello stesso grafico, rappresento la retta data.

Determino le coordinate dei punti di intersezione tra la funzione e la retta, mettendo a sistema le equazioni corrispondenti ai rami di parabola interessati dall'intersezione:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + x \\ y = \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x < 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{3}{2} \qquad x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad x_{1,2} = -1 \pm 2 = \left\langle \begin{matrix} -3 \\ [1] \end{matrix} \right. \qquad A\left(-3; \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x \\ y = \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{3}{2} \qquad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x_{1,2} = 1 \pm 2 = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ [-1] \end{matrix} \right. \qquad B\left(3; \frac{3}{2}\right)$$

Calcolo la distanza tra i due punti: $\overline{AB} = |x_B - x_A| = \boldsymbol{6}$.

5. Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $y = (2k+2)\,x^2 + (k^2 + 2k + 1)\,x + 2k - 2$:
   A. la parabola passa per l'origine: $2k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = 1}$
   B. la parabola ha il vertice sull'asse y: $k^2 + 2k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -1$

      Il valore ottenuto non è accettabile, visto che l'equazione non rappresenta più una parabola, perciò: $\nexists \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$
   C. la parabola ha come asse di simmetria la retta $x = 2$: $-\frac{(k+1)^2}{2(2\,(k+1))} = 2 \quad \Rightarrow \quad k + 1 = -8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = -9}$
   D. la parabola passa per il punto $P\,(-1; 0)$: per determinare il valore del parametro, sostituisco le coordinate del punto nell'equazione della parabola:

$$0 = 2k + 2 - k^2 - 2k - 1 + 2k - 2 \quad \Rightarrow \quad -(k-1)^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = 1}$$

6. Determina per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y = k$ stacca una corda lunga 6 sulla parabola di equazione $y = x^2 - 10x + 17$.

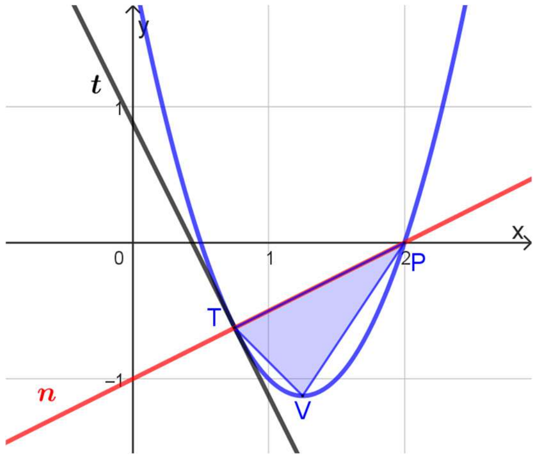
La parabola ha concavità rivolta verso l'alto e vertice $V(5; -8)$, perciò $k > -8$ perché ci siano due intersezioni distinte. Determino le coordinate dei punti di intersezione, A e B, tra la parabola e la retta in funzione del parametro, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = x^2 - 10x + 17 \\ y = k \end{cases} \qquad x^2 - 10x + 17 - k = 0 \qquad x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 17 + k} = 5 \pm \sqrt{8 + k}$$

Le coordinate dei punti di intersezione sono: $A\left(5 + \sqrt{8+k}; k\right)$ e $B\left(5 - \sqrt{8+k}; k\right)$. Pongo la loro distanza uguale a 6:

$$\overline{AB} = |x_A - x_B| = 6 \qquad 2\sqrt{8+k} = 6 \qquad \left(\sqrt{8+k}\right)^2 = 9 \qquad \boldsymbol{k = 1}$$

7. Sia data la parabola di equazione $y = 2x^2 - 5x + 2$:
   A. scrivi l'equazione della retta t tangente alla parabola di equazione nel suo punto T di ascissa $\frac{3}{4}$;
   B. determina l'equazione della normale n alla parabola passante per T (la normale è la retta perpendicolare alla tangente);
   C. detto P l'ulteriore punto di intersezione della normale con la parabola, determina l'area del triangolo TVP, dove V è il vertice della parabola.



A. Determino l'ordinata di T sostituendo l'ascissa data nell'equazione della parabola:

$$y_T = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{3}{4} + 2 = \frac{9}{8} - \frac{15}{4} + 2 = -\frac{5}{8} \qquad T\left(\frac{3}{4}; -\frac{5}{8}\right)$$

Determino l'equazione della tangente t alla parabola in T, usando la formula di sdoppiamento:

$$\frac{y + y_T}{2} = a x_T x + b\frac{x + x_T}{2} + c$$

$$\frac{y - \frac{5}{8}}{2} = 2 \cdot \frac{3}{4}x - 5 \cdot \frac{x + \frac{3}{4}}{2} + 2 \qquad \boldsymbol{t: y = -2x + \frac{7}{8}}$$

B. Determino l'equazione della normale, conoscendone il coefficiente angolare (antireciproco di quello della tangente):

$$y + \frac{5}{8} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right) \qquad \boldsymbol{n: y = \frac{1}{2}x - 1}$$

C. Determino le coordinate delle intersezioni tra la retta normale e la parabola:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases} \qquad 2x^2 - 5x + 2 = \frac{1}{2}x - 1 \qquad 4x^2 - 11x + 6 = 0$$

Sapendo che una delle soluzioni è l'ascissa di T, $x_1 = \frac{3}{4}$, posso determinare la seconda soluzione sapendo che il prodotto delle due soluzioni è $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$:

$$x_1 x_2 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}x_2 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \qquad P(2; 0)$$

Per calcolare l'area del triangolo, determino innanzi tutto le coordinate del vertice: $V\left(\frac{5}{4}; -\frac{9}{8}\right)$

$$\overline{PT} = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(0 + \frac{5}{8}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{5}{8}\sqrt{2^2 + 1} = \frac{5}{8}\sqrt{5} \qquad h = d(V; n) = \frac{\left|\frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{9}{8} - 2\right|}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{PT} \cdot d(V; n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{15}{32}}$$