1. Applica la definizione, dopo averla enunciata, e determina l'equazione della parabola, dati il fuoco $F\ (1; 4)$ e la direttrice $y = 2$.

Assegnati nel piano un punto F (fuoco) e una retta d (direttrice), la parabola è la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d. Sia P un punto di coordinate generiche $P(x; y)$. Applicando la definizione:

$$\overline{PF} = d(P, d) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = |y-2|$$

Elevando a quadrato entrambi i membri, ottengo l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = y^2 - 4y + 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{13}{4}}$$

2. Stabilisci per quali valori di a, b, c la parabola $x = ay^2 + by + c$:

A. ha fuoco sull'asse x: in altre parole, l'ordinata del fuoco è nulla, ovvero: $-\frac{b}{2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b = 0}$

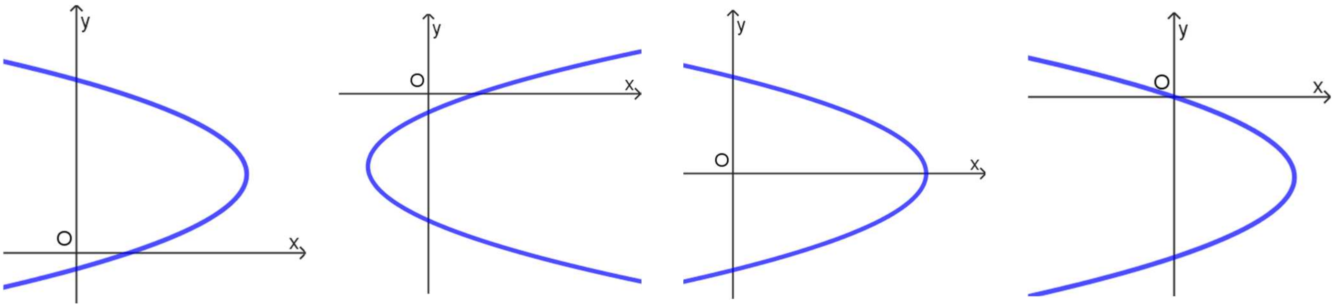
B. rivolge la concavità verso destra e passa per l'origine: $\boldsymbol{a > 0 \quad \wedge \quad c = 0}$

C. ha vertice nell'origine: $\boldsymbol{b = c = 0}$

D. ha come direttrice l'asse y:

la generica equazione della direttrice è $x = \frac{-1-\Delta}{4a} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1-\Delta}{4a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b^2 - 4ac = -1}$

3. Indica il segno di a, b, c nell'equazione $x = ay^2 + by + c$ per ciascuna delle parabole rappresentate:



$a < 0 \quad b > 0 \quad c > 0$ $\qquad a > 0 \quad b > 0 \quad c > 0$ $\qquad a < 0 \quad b = 0 \quad c > 0$ $\qquad a < 0 \quad b < 0 \quad c = 0$

4. Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x = (k-2)\, y^2 + (6k^2 - 2)\, y + 2k^4 + 8$:

A. rappresenta una parabola: $k - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k \neq 2}$

B. la parabola passa per l'origine: $2k^4 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$

C. la parabola ha il vertice sull'asse x: $6k^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}}$

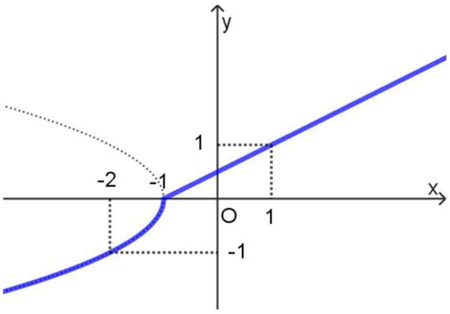
D. la parabola ha come asse di simmetria la retta $y = 2$:

$$-\frac{6k^2 - 2}{2(k-2)} = 2 \quad \Rightarrow \quad -3k^2 + 1 = 2k - 4 \quad \Rightarrow \quad 3k^2 + 2k - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k_1 = 1 \vee k_2 = -\frac{5}{3}}$$

E. la parabola passa per il punto $P\ (16; 0)$: per determinare il valore del parametro, sostituisco le coordinate del punto nell'equazione della parabola:

$$16 = 2k^4 + 8 \quad \Rightarrow \quad 2k^4 = 8 \quad \Rightarrow \quad k^4 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = \pm\sqrt{2}}$$

5. Trova l'equazione del grafico utilizzando i dati della figura, in cui l'arco rappresentato appartiene a una parabola:



Determino l'equazione della retta, che passa per i punti $(1,1)$ e $(-1,0)$:

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-0}{1-0} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Determino l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, quindi di equazione generica $x=ay^2+by+c$, con $b=0$, dato che ha asse coincidente con l'asse x, e $c=-1$, dato dall'intersezione con l'asse x. Posso poi usare le coordinate del punto $(-2;-1)$:

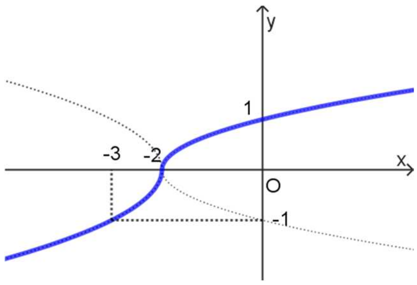
$$x=ay^2-1 \quad \Rightarrow \quad -2=a-1 \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

$$x=-y^2-1 \quad \Rightarrow \quad y^2=-x-1 \quad \Rightarrow \quad y=-\sqrt{-x-1}$$

L'equazione della funzione è:

$$\boldsymbol{y=\begin{cases}-\sqrt{-x-1} & se\ x\le -1\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & se\ x>-1\end{cases}}$$

6. Trova l'equazione del grafico utilizzando i dati della figura, in cui gli archi rappresentati appartengo a parabole:



Le due parabole hanno asse coincidente con l'asse x, quindi $b=0$ e intersecano l'asse x nel punto di ascissa -2, perciò $c=-2$. Partendo dall'equazione generica $x=ay^2-2$, impongo il passaggio prima per il punto $(-3;-1)$ per l'arco a sinistra e per il punto $(0;1)$ per l'arco a destra:

$$(-3;-1):\ -3=a-2 \quad \Rightarrow \quad a=-1 \quad \Rightarrow \quad x=-y^2-2$$

$$(0;1):\ 0=a-2 \quad \Rightarrow \quad a=2 \quad \Rightarrow \quad x=2y^2-2$$

I due archi rappresentati hanno equazione:

$$x=-y^2-2 \quad \Rightarrow \quad y^2=-x-2 \quad \Rightarrow \quad y=-\sqrt{-x-2}$$

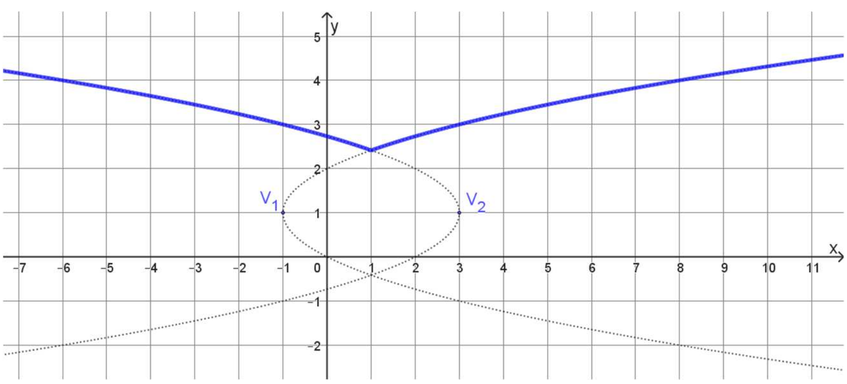
$$x=2y^2-2 \quad \Rightarrow \quad y^2=\frac{1}{2}x+1 \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{\frac{1}{2}x+1}$$

L'equazione della funzione è:

$$\boldsymbol{y=\begin{cases}-\sqrt{-x-1} & se\ x\le -2\\ \sqrt{\frac{1}{2}x+1} & se\ x>-2\end{cases}}$$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni:

7. $y=1+\sqrt{2+|x-1|}$



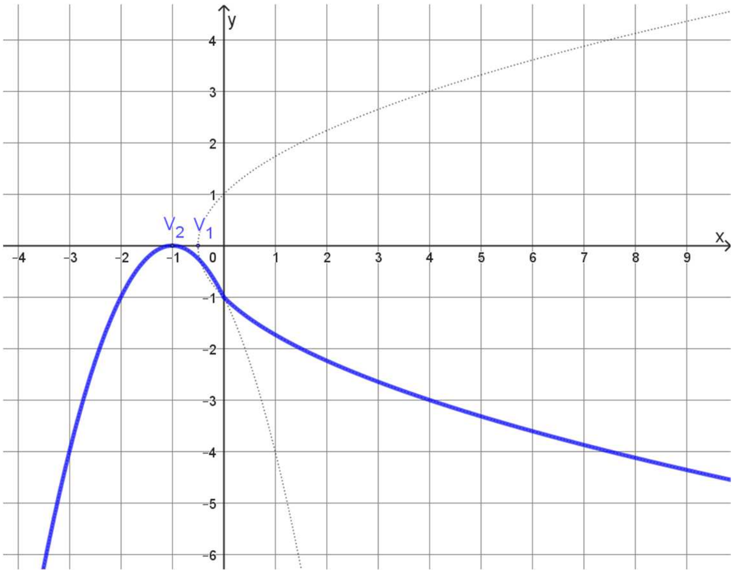
$$y=\begin{cases}1+\sqrt{x+1} & se\ x\ge 1\\ 1+\sqrt{3-x} & se\ x<1\end{cases}$$

Si tratta di due archi di parabola.

$$\begin{cases}y\ge 1\\ x=y^2-2y\end{cases} \qquad \begin{cases}y\ge 1\\ x=-y^2+2y+2\end{cases}$$

Il primo ha vertice $V_1(-1,1)$ e il secondo $V_2(3,1)$.

8. $y = \begin{cases} -\sqrt{2x+1} & se\ x \geq 0 \\ -x^2 - 2x - 1 & se\ x < 0 \end{cases}$



Per $x < 0$ si rappresenta la parabola con asse di simmetria $x = -1$ e vertice $V_2(-1; 0)$.

Per $x \geq 0$:

Dominio: $x \geq -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y \leq 0 \\ x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si tratta di un arco di parabola. La parabola di partenza ha vertice $V_1\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ e asse di simmetria coincidente con l'asse x.

Si rappresenta l'arco di parabola contenuto nel quarto quadrante, a partire da $x \geq 0$.