1. Un fiume di larghezza 12 m nel tratto in cui ci sono le rapide si stringe fino a 5,8 m. La profondità del fiume nel tratto prima delle rapide è 2,7 m, mentre nelle rapide diventa di 0,85 m. Calcola la velocità dell'acqua nel tratto delle rapide, spando che la velocità nel tratto precedente è 1,2 m/s. Assumi che la sezione del letto del fiume sia rettangolare.

$$L_1 = 12\, m \qquad L_2 = 5{,}8\, m \qquad h_1 = 2{,}7\, m \qquad h_2 = 0{,}85\, m \qquad v_1 = 1{,}2\, m/s \qquad v_2?$$

Per l'equazione di continuità:

$$\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_1 \frac{L_1 h_1}{L_2 h_2} = \mathbf{7{,}9\, m/s}$$

2. Un tubo di un impianto per il trasporto idrico ha una portata di 1200 L/minuto. Il tubo si trova a un'altezza di 1,2 m (punto A) che va salendo fino a 6,0 m (punto B). La pressione dell'acqua in A è di $3{,}5 \times 10^5\ Pa$, mentre in B vale $3{,}0 \times 10^5\ Pa$. Sapendo che il rapporto tra la velocità nel punto B e la velocità nel punto A è di 16/9, trova il valore delle due sezioni.

$$Q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = 1200 \frac{L}{min} \qquad h_A = 1{,}2\, m \qquad h_B = 6{,}0\, m \qquad P_A = 3{,}5 \times 10^5\ Pa \qquad P_B = 3{,}0 \times 10^5\ Pa$$

$$v_B = \frac{16}{9} v_A \qquad S_A? \qquad S_B?$$

Dall'equazione di continuità, posso ricavare il rapporto tra le due sezioni:

$$\rho S_A v_A = \rho S_B v_B \qquad \Rightarrow \qquad \frac{S_A}{S_B} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{16}{9}$$

Per l'equazione di Bernoulli:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B \qquad \Rightarrow \qquad v_B^2 - v_A^2 = \frac{P_A + \rho g h_A - P_B - \rho g h_B}{\frac{1}{2}\rho} = 2\left(\frac{P_A}{\rho} + g h_A - \frac{P_B}{\rho} - g h_B\right)$$

Posso sostituirla nell'equazione di Bernoulli:

$$2\left(\frac{P_A}{\rho} + g h_A - \frac{P_B}{\rho} - g h_B\right) = v_B^2 - v_A^2 = v_A^2\left(\frac{16}{9}\right)^2 - v_A^2 = v_A^2\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1\right) \qquad (1)$$

Dalla portata posso ricavare la relazione tra sezione e velocità nel punto A:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Sl}{\Delta t} = S\frac{l}{\Delta t} = S_A v_A \qquad \Rightarrow \qquad v_A = \frac{\frac{\Delta V^*}{\Delta t}}{S_A} = \frac{Q_V}{S_A}$$

Sostituendo questa relazione nell'equazione (1):

$$2\left(\frac{P_A}{\rho} + g h_A - \frac{P_B}{\rho} - g h_B\right) = \frac{Q_V^2}{S_A^2}\cdot\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad S_A = Q_V\sqrt{\frac{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1\right)}{2\left(\frac{P_A}{\rho} + g h_A - \frac{P_B}{\rho} - g h_B\right)}} = \mathbf{0{,}012\, m^2}$$

E posso ricavare anche il valore seconda sezione:

$$S_B = \frac{9}{16} S_A = \mathbf{0{,}0069\, m^2}$$

$$^*\frac{\Delta V}{\Delta t} = 1200\, L/min = 1200\, dm^3/60\, s = 0{,}02\, m^3/s$$

3. Trova il volume d'acqua che esce in un minuto da un serbatoio attraverso un'apertura di 2,0 cm di diametro posta 5,0 m sotto la superficie dell'acqua.

$$h = 5{,}0\ m \qquad d = 2{,}0\ cm \qquad \frac{\Delta V}{\Delta t}?$$

Posso ricavare la velocità v_2 usando il teorema di Torricelli:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Dalla definizione di portata volumetrica:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Sl}{\Delta t} = S\frac{l}{\Delta t} = \pi r^2 v = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 v = \mathbf{0{,}19\ m^3/min}$$

4. Un carrello di massa *m*, che si muove con una velocità *v* su una rotaia a cuscino d'aria priva di attrito, urta contro un identico carrello che è in quiete. Se i due carrelli rimangono attaccati dopo la collisione, qual è l'energia cinetica finale del sistema?

$$m_1 = m_2 = m \qquad v_1 = v \qquad v_2 = 0 \qquad K_f?$$

Si tratta di un urto totalmente anelastico, perciò si può applicare il principio di conservazione della quantità di moto:

$$p_i = p_f \quad \Rightarrow \quad mv = (m+m)\,v_f \quad \Rightarrow \quad mv = 2mv_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{1}{2}v$$

$$K_f = \frac{1}{2}(m+m)\,v_f^2 = m\left(\frac{1}{2}v\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{4}mv^2}$$

5. Un mitra spara 100 pallottole al minuto aventi ciascuna la massa di 60 g. Se la forza media che il mitragliere esercita per tenere in mano l'arma è uguale a 50 N, qual è la velocità delle pallottole?

$$N = 100 \qquad \Delta t_{tot} = 1\ min \qquad v_o = 0 \qquad m = 60\ g \qquad F_m = 50\ N \qquad v?$$

Per il teorema dell'impulso:

$$I = \Delta p \quad \Rightarrow \quad F_m \Delta t = mv - mv_o \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F_m \Delta t}{m} = \frac{F_m \frac{\Delta t_{tot}}{N}}{m} = \mathbf{500\ m/s}$$

6. Per fermare un'automobilina giocattolo di massa 2,0 kg, un ragazzino applica per 2,0 s una forza costante d'intensità 5,0 N diretta in verso opposto al moto dell'automobile. Con quale velocità si muoveva il giocattolo prima che venisse bloccato? Se, a parità di condizioni iniziali, il ragazzino avesse voluto bloccare l'automobile in 1,0 s, quanto avrebbe dovuto essere intensa la forza applicata?

$$m = 2{,}0\,kg \qquad \Delta t_1 = 2{,}0\,s \qquad F_1 = -5{,}0\,N \qquad v = 0\,m/s \qquad v_o? \qquad \Delta t_2 = 1{,}0\,s \quad F_2?$$

Per il teorema dell'impulso:

$$I = \Delta p \quad \Rightarrow \quad F_1 \Delta t_1 = mv - mv_o \quad \Rightarrow \quad v_o = -\frac{F_1 \Delta t_1}{m} = \mathbf{5,0\ m/s}$$

A partire dalla stessa velocità iniziale, applicando la forza per un tempo che è la metà di quello precedente, avrò bisogno di una forza doppia rispetto a quella usata prima, perché il secondo membro dell'equazione non cambia e forza e tempo sono inversamente proporzionali, perciò:

$$F_2 = 2F_1 = \mathbf{10\ N}$$

7. In un test d'urto, un'automobile di 1400 kg è lanciata contro un muro alla velocità di 12 m/s. Subito dopo il contatto, che dura 0,14 s, l'automobile si sposta in verso opposto con velocità pari a 2,0 m/s. Qual è la forza media che agisce sull'automobile durante l'urto?

$$m = 1400\,kg \qquad v_1 = -12\,m/s \qquad \Delta t = 0{,}14\,s \qquad v_2 = 2{,}0\,m/s \qquad F_m?$$

Per il teorema dell'impulso:

$$I = \Delta p \quad \Rightarrow \quad F_m \Delta t = mv_2 - mv_1 \quad \Rightarrow \quad F_m = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t} = \mathbf{1,4 \times 10^5\ N}$$

8. Un proiettile di massa 35,0 g viene sparato orizzontalmente contro un blocco di legno di 5,20 kg in grado di scorrere sulla superficie orizzontale senza attrito. Il proiettile resta conficcato nel pezzo di legno, che acquista una velocità orizzontale di 1,85 m/s nello stesso verso del proiettile. Calcola la velocità iniziale del proiettile.

$$m_1 = 35{,}0\,g \qquad m_2 = 5{,}20\,kg \qquad v_2 = 0\,m/s \qquad v_f = 1{,}85\,m/s \qquad v_1?$$

Si tratta di un urto totalmente anelastico, perciò si può applicare il principio di conservazione della quantità di moto:

$$p_i = p_f \quad \Rightarrow \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v_f$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_f + m_2 v_f - m_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{m_1 v_f + m_2 v_f - m_2 v_2}{m_1} = \mathbf{277\ m/s}$$