1. Sia data la retta a, asse del segmento di estremi A (3; 1) e B (11; 5).
   a. Determina la retta r, parallela al segmento AB, che incontra l'asse y nel punto di ordinata $-\frac{11}{2}$
   b. Verifica che C (9; – 1) è il punto di intersezione tra la retta r e la retta a.
   c. Determina perimetro e area del triangolo ABC.
   d. Verifica che M (7; 3) è il punto di intersezione tra la retta a e il segmento AB.
   e. Determina il punto C', simmetrico di C rispetto al punto M.

Determino innanzi tutto l'equazione dell'asse a del segmento AB:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=(x-11)^2+(y-5)^2 \implies -6x+9-2y+1=-22x+121-10y+25 \implies \mathbf{2x+y-17=0}$$

a. Della retta r conosco l'ordinata all'origine. Per determinare il coefficiente angolare, calcolo il coefficiente angolare del segmento AB, che coinciderà con quello di r, visto che sono parallele:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-1}{11-3}=\frac{1}{2} \implies r: \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}}$$

b. Determino le coordinate del punto C di intersezione tra r e a, mettendo a sistema le equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} y=-2x+17 \\ y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{2} \end{cases} \implies x-11=-4x+34 \implies \begin{cases} x=9 \\ y=-1 \end{cases} \quad \boldsymbol{c.v.d.}$$

c. Il triangolo ABC è un triangolo isoscele, in quanto il punto C si trova sull'asse del segmento AB. Pertanto, determino la lunghezza del lato AC, che coincide con quello di CB e quella del lato AB, base del triangolo isoscele:

$$\overline{BC}=\overline{AC}=\sqrt{(9-3)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{10} \qquad \overline{AB}=\sqrt{(11-3)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{5}$$

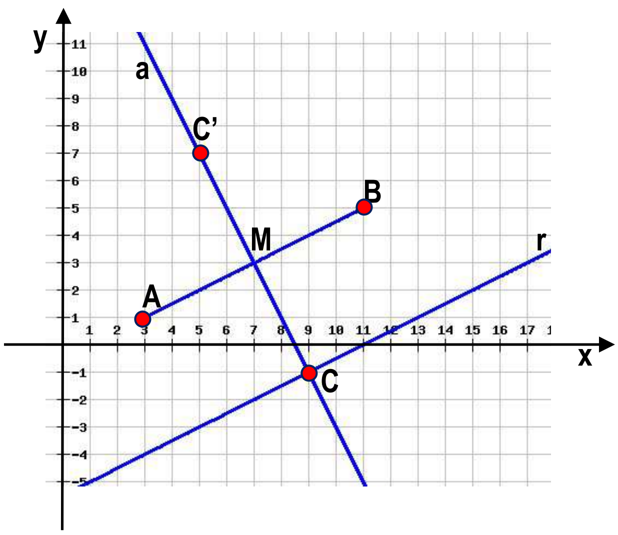
Pertanto: $2p=2\sqrt{10}+2\sqrt{10}+4\sqrt{5}=\boldsymbol{4\sqrt{5}\,(\sqrt{2}+1)}$

Applicando il teorema di Pitagora, determino l'altezza del triangolo CM: $\overline{CM}=\sqrt{\overline{AC}^2-\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}=\sqrt{40-20}=2\sqrt{5}$

Ora posso calcolare l'area: $A=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CM}}{2}=\frac{4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}=\mathbf{20}$

d. Essendo la retta a l'asse del segmento AB, il punto di intersezione tra l'asse e il segmento coincide con il punto medio del segmento, ovvero: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)=(7;3)$ $\quad \boldsymbol{c.v.d.}$

e. Determino l'equazione della simmetria centrale di centro M: $\begin{cases} x'=2x_M-x \\ y'=2y_M-y \end{cases} \implies \begin{cases} x'=14-x \\ y'=6-y \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{C'(5;7)}$



2. Scrivi l'equazione del fascio generato dalle rette $r: x - 2y + 6 = 0$ e $s: 2y - x + 1 = 0$. Determina per quali valori del parametro la retta del fascio:
   a. passa per il punto (1; 3)
   b. incontra la retta $x - 5y + 2 = 0$ nel suo punto di ascissa 3
   c. forma con gli assi un triangolo di area 4
   d. ha distanza dall'origine uguale a $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

Trattandosi di due rette parallele di coefficiente angolare $\frac{1}{2}$, l'equazione del fascio si può scrivere in forma semplificata: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + k}$

a. Determino il passaggio del fascio per il punto dato, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$3 = \frac{1}{2} + k \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = \frac{5}{2}}$$

b. Determino innanzi tutto le coordinate del punto, sostituendo il valore dell'ascissa nell'equazione della retta data:

$$3 - 5y + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 1$$

perciò devo determinare il passaggio del fascio per il punto (3; 1), sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$1 = \frac{3}{2} + k \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = -\frac{1}{2}}$$

c. Determino le intersezioni del fascio prima con l'asse x: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + k \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2k \\ y = 0 \end{cases}$ e poi con l'asse y: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + k \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases}$.

Perciò i due cateti del triangolo rettangolo che si viene a formare hanno dimensioni: $|\,2k\,|$ e $|\,k\,|$, perciò:

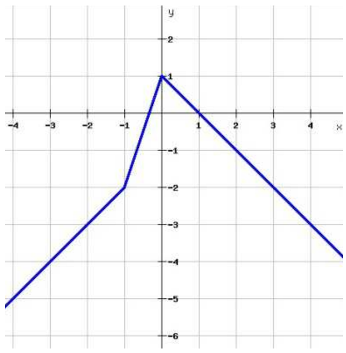
$$\frac{|\,2k\,| \cdot |\,k\,|}{2} = 4 \quad \Longrightarrow \quad k^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = \pm 2}$$

d. Pongo la distanza della generica retta del fascio dall'origine uguale a $\frac{2}{5}\sqrt{5}$:

$$\frac{|\,0 - 2 \cdot 0 + 2k\,|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad |\,2k\,| = 2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = \pm 1}$$

3. Rappresenta graficamente la funzione: $y = |\,x + 1\,| - |\,2x\,|$

$$y = \begin{cases} x - 1 & se\ x < -1 \\ 3x + 1 & se\ -1 \le x < 0 \\ 1 - x & se\ x \ge 0 \end{cases}$$



4. Rappresenta nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \le 3 \\ x - y - 1 \ge 0 \end{cases}$