12. Verifica che il quadrilatero di vertici A (4; 2), B (10; 8), C (12; 1), D (6; -5) è un parallelogrammo.

Mi basta verificare che ha due coppie di lati opposti paralleli e determino quindi i coefficienti angolari dei lati, verificando che i coefficienti angolari sono uguali a due a due:

$$m_{AB} = \frac{8-2}{10-4} = 1 \qquad m_{CD} = \frac{1+5}{12-6} = 1 \qquad \Rightarrow \quad AB \ // \ CD$$

$$m_{BC} = \frac{8-1}{10-12} = -\frac{7}{2} \qquad m_{AD} = \frac{2+5}{4-6} = -\frac{7}{2} \qquad \Rightarrow \quad BC \ // \ AD$$

13. Dato il triangolo di vertici O (0; 0), A (5; 3) e B (-6; 10), determina le misure dei suoi lati e verifica che è un triangolo rettangolo. Verifica inoltre che la mediana relativa all'ipotenusa è uguale alla metà dell'ipotenusa stessa.

Determino le misure dei lati del triangolo e, applicando il teorema di Pitagora, verifico che è rettangolo:

$$\overline{OA} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \qquad \overline{OB} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34} \qquad \overline{AB} = \sqrt{121+49} = \sqrt{170}$$

Applico il teorema di Pitagora: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{34+136} = \sqrt{170}$

Determino la mediana OM relativa all'ipotenusa, determinando prima le coordinate di M, punto medio dell'ipotenusa AB:

$$M\left(-\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right) \text{ e calcolo } \overline{OM} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{169}{4}} = \frac{\sqrt{170}}{2} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

14. Un triangolo rettangolo ha come ipotenusa il segmento di estremi O (0; 0) e A (10; 0) mentre il terzo vertice B ha ascissa 2. Determina l'ordinata di B.

Essendo un triangolo rettangolo, $\overline{OB} \perp \overline{AB}$, perciò il coefficiente angolare del lato OB è antireciproco del coefficiente angolare del lato AB. Ponendo questa condizione, possiamo determinare l'ordinata di B, conoscendone l'ascissa:

$$m_{OB} = -\frac{1}{m_{AB}} \qquad \frac{y_B}{2} = -\frac{8}{-y_B} \quad \Rightarrow \quad y_B^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y_B = \pm 4$$

15. Un triangolo isoscele ABC, di base AB, ha i vertici nei punti A (2; 0), B (6; 2), mentre l'ordinata di C è 8. Trova l'ascissa di C.

Sfrutto la condizione secondo la quale il triangolo ABC è isoscele, di base AB:

$$CA = CB \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2 + 64} = \sqrt{(x-6)^2 + 36} \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + 64 = x^2 - 12x + 36 + 36 \quad \Rightarrow \quad 8x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

16. Verifica che, congiungendo i punti medi dei lati del quadrilatero di vertici A (-2; 1), B (-2; 4), C (2; 9) e D (4; 1), si ottiene un rettangolo.

Determino le coordinate dei punti medi dei singoli lati:

$$M_{AB}\left(-2;\frac{5}{2}\right) \qquad M_{BC}\left(0;\frac{13}{2}\right) \qquad M_{CD}\,(3;5) \qquad M_{DA}\,(1;1)$$

Mi basta verificare che ha due coppie di lati opposti paralleli e che i lati consecutivi sono perpendicolari, calcolando i coefficienti angolari dei lati:

$$m_{M_{AB}M_{BC}} = \frac{\frac{13}{2}-\frac{5}{2}}{0+2} = 2 \qquad m_{M_{CD}M_{DA}} = \frac{5-1}{3-1} = 2 \qquad \Rightarrow M_{AB}M_{BC} \parallel M_{CD}M_{DA}$$

$$m_{M_{AB}M_{DA}} = \frac{\frac{5}{2}-1}{-2-1} = -\frac{1}{2} \qquad m_{M_{CD}M_{BC}} = \frac{\frac{13}{2}-5}{0-3} = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow M_{AB}M_{DA} \parallel M_{CD}M_{BC}$$

E i lati consecutivi sono perpendicolari. $c.v.d.$

17. Sull'asse x, determina il punto P equidistante dall'origine e dal punto A (8; 4).

Trovandosi sull'asse x, il punto P ha coordinate: $P\,(x;0)$ ed essendo equidistante dall'origine e da A:

$$PA = PO \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-8)^2+16} = \sqrt{x^2}$$

$$x^2 - 16x + 64 + 16 = x^2 \quad \Rightarrow \quad -16x = -80 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

18. Determina un punto A (m; 1), situato nel primo quadrante, la cui distanza dall'origine O sia doppia della distanza da O del punto $B\left(-\frac{3}{2};2\right)$

$$AO = 2\,OB \quad \Rightarrow \quad \sqrt{m^2+1} = 2\sqrt{\frac{9}{4}+4} \quad \Rightarrow \quad m^2+1 = 9+16 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad m = 2\sqrt{6}$$

Scelgo solo il risultato positivo, dato che il punto A è situato nel primo quadrante e ha quindi entrambe le coordinate positive.

19. Determina le coordinate dei punti che hanno ascissa doppia dell'ordinata e la cui distanza dall'asse x è uguale a 3.

La distanza dall'asse x è uguale a 3: $|y| = 3$

L'ascissa è doppia dell'ordinata: $x = 2y$

Da queste due condizioni si ottengono i due punti:

$$P_1\,(6;3) \qquad P_2\,(-6;-3)$$

20. Dati i punti A (-1; -2), B (7;0), C (7; 4), D (5; 6), verifica che, detti rispettivamente M, N, P, Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA, si ha MN = PQ e QM = PN. Verifica inoltre che il perimetro del parallelogrammo MNPQ è uguale ad AC + BD.

Determino i punti medi dei lati AB, BC, CD e DA:

$$M\ (3;-1) \qquad N\ (7;2) \qquad P\ (6;5) \qquad Q\ (2;2)$$

Determino la lunghezza dei segmenti che congiungono i punti medi, verificando che i lati opposti sono congruenti:

$$MN=\sqrt{(7-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+9}=5 \qquad PQ=\sqrt{(6-2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

$$QM=\sqrt{(2-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10} \qquad PN=\sqrt{(6-7)^2+(5-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

Determino le lunghezze di AC e BD per verificare che $2p_{MNPQ}=AC+BD$:

$$AC=\sqrt{(7+1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{64+36}=10 \qquad BD=\sqrt{(7-5)^2+(0-6)^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$$

$$2p_{MNPQ}=5+5+\sqrt{10}+\sqrt{10}=10+2\sqrt{10}=AC+BD$$

21. Determina il punto di intersezione P dell'asse del segmento AB, di estremi A (4; 0) e B (0; -6) e dell'asse del segmento CD, di estremi C (-3; 0) e D (0; -4).

Per determinare l'asse del segmento, devo determinare innanzi tutto le coordinate del punto medio del segmento, poi il suo coefficiente angolare e in questo modo determino l'asse come retta passante per il punto medio del segmento con coefficiente angolare pari all'antireciproco del coefficiente angolare del segmento[1]:

$$M_{AB}\ (2;-3) \qquad m_{AB}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2} \qquad asse\ di\ AB: y-y_M=-\frac{1}{m_{AB}}(x-x_M)$$

$$y+3=-\frac{2}{3}(x-2) \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

$$M_{CD}\left(-\frac{3}{2};-2\right) \qquad m_{CD}=\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3} \qquad asse\ di\ CD: y-y_M=-\frac{1}{m_{CD}}(x-x_M)$$

$$y+2=\frac{3}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{8}$$

Ottenuti i due assi, metto a sistema le loro equazioni per determinarne il punto di intersezione:

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \\ y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{7}{8}=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \\ y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} 34x=-19 \\ y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{8} \end{cases} \qquad P\left(-\frac{19}{34};-\frac{22}{17}\right)$$

[1] Posso determinare l'equazione dell'asse del segmento anche usando la formula dell'asse. Dato il segmento di estremi A e B per determinare l'equazione dell'asse applico la formula: $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$. Perciò:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y+6)^2 \quad\Rightarrow\quad 2x+3y+5=0$$

Allo stesso modo per l'asse del segmento CD:

$$(x+3)^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y+4)^2 \quad\Rightarrow\quad 6x-8y-7=0$$