22. Trova l'equazione della retta passante per l'origine e perpendicolare alla retta che congiunge i punti A (-1; 6) e B (5; 4)

Determino il coefficiente angolare della retta che congiunge i punti A e B. Essendo perpendicolare la retta che devo determinare, essa avrà il coefficiente angolare che è l'antireciproco della retta AB:

$$y - y_O = -\frac{1}{m_{AB}}(x - x_O)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-6}{5+1} = -\frac{1}{3} \qquad y = 3x$$

23. Dopo aver verificato che i punti O (0; 0), A (4; 6), B (13; 0), C (12; -8), presi nell'ordine, sono i vertici di un trapezio rettangolo, verificare che la parallela alle basi, condotta per il punto medio M di un lato obliquo, passa per il punto medio N del lato opposto e che, detti P e Q i punti medi delle due basi, i segmenti MQ e PN sono paralleli.

Verifico che $\overline{OC} \,//\, \overline{AB}$ determinando il coefficiente angolare dei due lati:

$$m_{OC} = \frac{-8-0}{12-0} = -\frac{2}{3} \qquad m_{AB} = \frac{0-6}{13-4} = -\frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{OC} \,//\, \overline{AB}$$

Verifico che $\overline{OA} \perp \overline{OC}$, sempre calcolando i coefficienti angolari: $m_{OA} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{OA} \perp \overline{OC}$

Determino il punto medio del lato BC: $M\left(\frac{25}{2}; -4\right)$ e determino la retta parallela alle basi passante per M:

$$y + 4 = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{25}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

Determino il punto medio del lato AO, N, e verifico che appartiene alla retta data, sostituendo le sue coordinate nell'equazione della retta appena determinata:

$$N\ (2; 3): \qquad 3 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{13}{3}$$

Determino P punto medio di OC e Q punto medio di AB:

$$P\ (6; -4) \qquad Q\left(\frac{17}{2}; 3\right).$$

Determino i coefficienti di MQ e PN, verifico che sono uguali e quindi $\overline{MQ} \,//\, \overline{PN}$

$$m_{MQ} = \frac{-4-3}{\frac{25}{2} - \frac{17}{2}} = -\frac{7}{4} \qquad m_{PN} = \frac{-4-3}{6-2} = -\frac{7}{4}$$

24. Conduci per il punto A (0; 6) la parallela e la perpendicolare alla retta di equazione $x + 3y = 6$ ed indica con B e C i loro punti di intersezione con l'asse x. Calcola l'area del triangolo ABC.

Trasformo innanzi tutto la retta data nella sua forma esplicita, in modo da evidenziarne il coefficiente angolare:

$$x + 3y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + 2$$

La retta passante per A e perpendicolare alla retta data è quindi:

$$y - 6 = 3(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 6$$

La retta passante per A e parallela alla retta data è: $y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + 6$

Determino i punti di intersezione delle rette così determinate con l'asse x:

$$\begin{cases} x + 3y = 18 \\ y = 0 \end{cases} \quad B\,(18;\,0) \qquad\qquad \begin{cases} y = 3x + 6 \\ y = 0 \end{cases} \quad C\,(-2;\,0)$$

Per determinare l'area del triangolo ABC considero BC come base, mentre l'altezza è data dall'ordinata di A in valore assoluto:

$$\overline{BC} = |-2 - 18| = 20 \qquad h = 6 \qquad A = \frac{6 \cdot 20}{2} = 60$$

25. Calcola l'area del parallelogrammo OBCA conoscendo i suoi tre vertici consecutivi O (0; 0), B (3; -1), C (5; 1).

Determino la base OB: $\overline{OB} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, mentre l'altezza del parallelogrammo è la distanza di C dalla retta OB, perciò prima determino l'equazione della retta OB e poi calcolo la distanza di C da tale retta:

$$r_{\overline{OB}}: \frac{x - x_B}{x_O - x_B} = \frac{y - y_B}{y_O - y_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{-3} = \frac{y+1}{1} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x \qquad\qquad h = \frac{|5+3|}{\sqrt{1+9}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

$$A = \sqrt{10} \cdot \frac{8}{\sqrt{10}} = 8$$

26. Trova le equazioni delle rette uscenti dall'origine O degli assi coordinati che hanno distanza 5 dal punto A (1; - 7)

La generica retta passante per l'origine ha equazione: $y = mx$. Pongo la distanza del punto A dalla retta generica uguale a 5:

$$5 = \frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \Rightarrow \quad 25 = \frac{m^2 + 14m + 49}{m^2+1} \quad \Rightarrow \quad 25m^2 + 25 = m^2 + 14m + 49$$

$$24\,m^2 - 14\,m - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12\,m^2 - 7\,m - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+576}}{24} = \left\langle \begin{matrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{3}{4} \end{matrix} \right.$$

Determinati i coefficienti angolari, sostituisco i valori trovati nella retta generica passante per l'origine e determino quindi le rette richieste:

$$y = \frac{4}{3}x \qquad y = -\frac{3}{4}x$$

27. Trova l'equazione della retta che passa per il punto P d'intersezione delle due rette $x+y=0$ e $2x-y+3=0$ ed è parallela alla retta $y=3x-1$.

Determino le coordinate di P, mettendo a sistema le equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-x \\ 2x+x=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \qquad P\,(-1;1)$$

Determino la retta passante per P e parallela a $y=3x-1$, che quindi avrà coefficiente angolare pari a 3:

$$y-y_P=3\,(x-x_P) \quad \Rightarrow \quad y-1=3\,(x+1) \quad \Rightarrow \quad y=3x+4$$

28. Dato il triangolo di vertici A (-2; 3), B (0; 5), C (2; -2), trova l'equazione della retta che passa per C ed è parallela alla mediana uscente da A.

Determino il punto medio di BC e il coefficiente angolare della mediana:

$$M\left(1;\frac{3}{2}\right) \qquad m_{AM}=\frac{3-\frac{3}{2}}{-2-1}=\frac{\frac{3}{2}}{-3}=-\frac{1}{2}$$

$$y-y_C=-\frac{1}{2}\,(x-x_C) \quad \Rightarrow \quad y+2=-\frac{1}{2}\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x-1$$

29. Trova l'equazione della retta che passa per il punto P d'intersezione delle due rette y = 2x e 2y – 3 = 0 ed è perpendicolare alla retta x + y – 1 = 0.

Determino il punto d'intersezione P tra le due rette:

$$\begin{cases} y=2x \\ 2y-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ y=2x \end{cases} \qquad P\left(\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$$

Essendo parallela alla retta x + y – 1 = 0, la retta da determinare ha coefficiente angolare che è pari al suo antireciproco.

$$y-\frac{3}{2}=1\left(x-\frac{3}{4}\right) \qquad y=x+\frac{3}{4}$$

30. Determina l'equazione dell'asse del segmento di estremi A (2; 0) e B (–4; 2).

Applico la formula per determinare l'asse di un segmento, data dalla definizione di asse come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento: $a_{\overline{AB}}:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$

$$a_{\overline{AB}}:(x-2)^2+(y-0)^2=(x+4)^2+(y-2)^2$$

$$x^2-4x+4+y^2=x^2+8x+16+y^2-4y+4 \qquad 3x-y+4=0$$