41. *Scritte le equazioni delle rette r ed r' passanti per A (0; 1) e rispettivamente parallela e perpendicolari alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, determinare l'area del triangolo limitato da r ed r' e dalla retta y = 2x – 3.*

Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas

Determino la retta *r* passante per A (0; 1) e parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, ovvero con coefficiente angolare 1: $y-1=1\,(x-0)$, cioè: $r\colon y=x+1$.

Determino la retta *r'* passante per A (0; 1) e perpendicolare alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, ovvero con coefficiente angolare -1: $y-1=-1\,(x-0)$, cioè: $r\colon y=-x+1$.

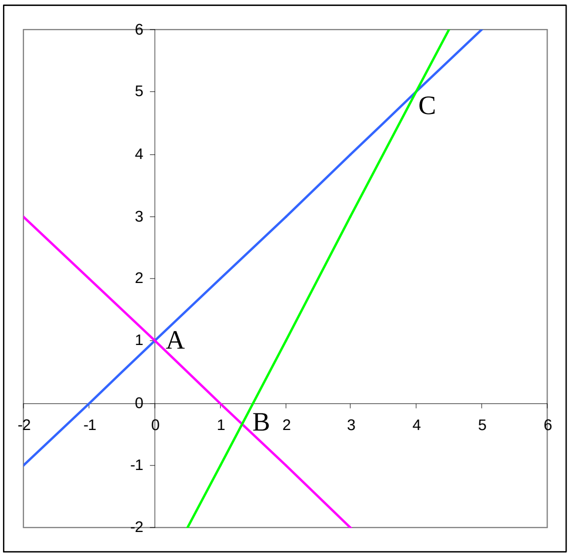
Determino l'intersezione B tra la retta $y=2x-3$ e la retta *r'*: $B\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Determino l'intersezione C tra la retta $y=2x-3$ e la retta *r*: $C\,(4;5)$.

Essendo un triangolo rettangolo in A, dato che *r* ed *r'* sono perpendicolari ed entrambe passanti per A, per calcolarne l'area basta determinare la misura dei due cateti AB e AC:

$$AB=\frac{4}{3}\sqrt{2} \text{ e } AC=4\sqrt{2}$$

Perciò l'area misura: $A=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}=\boxed{\dfrac{16}{3}}$



42. Dopo aver determinato l'equazione dell'asse del segmento di estremi $O\,(0;0)$ e $A\,(2;-1)$, verifica che il punto $\left(0;-\frac{5}{2}\right)$ appartiene a esso, mentre non vi appartiene il punto $(3;3)$. Calcola l'ordinata del punto dell'asse che ha ascissa 2.

Determino innanzi tutto l'equazione dell'asse a del segmento di estremi O e A, secondo la regola:

$$a\colon (x-x_O)^2+(y-y_O)^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(x-2)^2+(y+1)^2$$

$$x^2+y^2=x^2-4x+4+y^2+2y+1 \qquad \boxed{a\colon 4x-2y-5=0}$$

Verifico l'appartenenza del punto $\left(0;-\frac{5}{2}\right)$ all'asse, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione dell'asse:

$$4\cdot 0-2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-5=0 \quad\Rightarrow\quad 0+5-5=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\left(0;-\frac{5}{2}\right)\in a}$$

Verifico la non appartenenza del punto $(3;3)$ all'asse, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione dell'asse:

$$4\cdot 3-2\cdot 3-5=12-6-5=1\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{(3;3)\notin a}$$

Per calcolare l'ordinata del punto dell'asse di ascissa 2, sostituisco l'ascissa nell'equazione dell'asse:

$$4\cdot 2-2y-5=0 \quad\Rightarrow\quad -2y=-3 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y=\frac{3}{2}}$$

43. Determina l'ordinata del punto A di ascissa -3 appartenente alla retta passante per l'origine e di coefficiente angolare $\frac{2}{5}$.

La retta passante per l'origine e di coefficiente angolare $\frac{2}{5}$ ha equazione: $y = \frac{2}{5}x$.

Siccome il punto A appartiene a tale retta, sostituisco il valore dell'ascissa, -3, nell'equazione della retta e determino così l'ordinata:

$$y = \frac{2}{5} \cdot (-3) = \boxed{-\frac{6}{5}}$$

44. Sia data la retta di equazione $2y - x - 6 = 0$. Sia A il punto della retta di ascissa -1 e B quello di ordinata 4. Calcola la misura del segmento $\overline{AB}$.

Determino innanzi tutto le coordinate di A e di B, sostituendo la coordinata nota nell'equazione della retta cui appartengono:

$$2y - (-1) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A\left(-1; \frac{5}{2}\right)}$$

$$2 \cdot 4 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B\,(2; 4)}$$

Ora posso determinare la lunghezza del segmento $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + \left(\frac{5}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{5}}$$

45. Di un parallelogrammo ABCD si conoscono i vertici consecutivi A (1; 1), B (5; 2) e C (3; 4). Determina il quarto vertice D.

Il parallelogrammo ha i lati opposti congruenti e paralleli. Determino il coefficiente della retta passante per i punti A e B e impongo il passaggio per il punto C: in questo modo ho l'equazione della retta CD. Determino poi il coefficiente della retta passante per i punti B e C e impongo il passaggio per il punto A: in questo modo ho l'equazione della retta AD.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4} \qquad m_{\overline{CB}} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{2-4}{5-3} = -1$$

$$y - y_C = m_{\overline{AB}}\,(x - x_C) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \frac{1}{4}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$y - y_A = m_{\overline{CB}}\,(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -1\,(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 2$$

Metto a sistema le equazioni delle due rette e determino le coordinate del punto D.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \\ y = -x + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}x + \frac{13}{4} = -x + 2 \quad \Rightarrow \quad x + 4x = 8 - 13 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}}$$

Oppure più semplicemente: so che le due diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ hanno il punto medio in comune.

Calcolo il punto medio di $\overline{AC}$ $\qquad M\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Siccome coincide con il punto medio della diagonale $\overline{BD}$, conoscendo le coordinate del punto medio M e dell'estremo B, posso determinare le coordinate di D:

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = x_M \\ \frac{y_B + y_D}{2} = y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 2\,x_M - x_B \\ y_D = 2\,y_M - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 4-5 \\ y_D = 5-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D\,(-1;\,3)}$$

46. Dati i punti A (1; 3) e B (5; 1), scrivi l'equazione della retta *r*, asse di AB. Sia C il punto di intersezione di *r* con l'asse *x* e D quello di intersezione di *r* con l'asse *y*. Determina la misura dell'area del quadrilatero concavo ACBD.

Determino innanzi tutto l'equazione dell'asse r del segmento di estremi A e B, secondo la regola:

$$r: (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = (x-x_B)^2 + (y-y_B)^2$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1$$

$$8x - 4y - 16 = 0 \qquad \boxed{r: 2x - y - 4 = 0}$$

Determino i punti C e D mettendo a sistema, rispettivamente, l'equazione di *r* con quella dell'asse *x* e l'equazione di *r* con quella dell'asse *y*:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\,(2;\,0)}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D\,(0;\,-4)}$$

Determino l'area del quadrilatero, sottraendo dall'area del triangolo ABD l'area di ABC:

$$A_{ACBD} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_D - x_B & y_D - y_B \end{vmatrix}\right| - \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}\right| - \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}(20+10) - \left|\frac{1}{2}(-1-9)\right| = 15 - 5 = \boxed{10}$$

I due triangoli ABD e ABC sono entrambi isosceli, perciò posso procedere in modo diverso, determinando la lunghezza della base $\overline{AB}$, il punto medio M della base, la lunghezza delle due altezze $\overline{CM}$ e $\overline{DM}$:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{5+1}{2};\frac{3+1}{2}\right) = (3;\,2)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{CM} = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{DM} = \sqrt{(x_D - x_M)^2 + (y_D - y_M)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \overline{CM} = \frac{1}{2}\,2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5 \qquad A_{ABD} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \overline{DM} = \frac{1}{2}\,2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 15$$

$$A_{ACBD} = A_{ABD} - A_{ABC} = 15 - 5 = 10$$