47. Verifica che la parallela condotta per il punto (-1; 3) alla retta che congiunge i punti (5; 2) e (1; - 2) determina con gli assi cartesiani un triangolo di area di misura 8.

Determino il coefficiente angolare della retta congiungente i punti (5; 2) e (1; - 2):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{1-5} = 1$$

Posso determinare la retta passante per il punto (-1; 3) e con coefficiente angolare 1:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = 1\,(x+1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 4$$

La retta così determinata è parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante e forma quindi con gli assi cartesiani due angoli di 45°. Il triangolo che si viene a formare è rettangolo isoscele e ha i cateti che misurano 4, visto che l'ordinata all'origine (come si evince dall'equazione della retta) è 4. L'area del triangolo vale quindi, come richiesto dal testo, 8.

Procedendo diversamente, posso determinare le coordinate dei punti di intersezione della retta con gli assi e poi, considerato che si tratta di un triangolo rettangolo in O, determino le distanze di tali punti dall'origine e ottengo l'area come semiprodotto dei due cateti:

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A\,(0;4)$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B\,(-4;0)$$

$$\overline{AO} = |\,y_O - y_A\,| = 4 \qquad \overline{BO} = |\,x_O - x_B\,| = 4$$

$$A_{ABO} = \frac{1}{2}\,\overline{AO}\cdot\overline{BO} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8 \qquad \text{c.v.d.}$$

48. Verifica che il quadrilatero avente per vertici i punti A (1; 0), B (6; 0), C (9; 4) e D (4; 4) è un rombo.

Stabilisco innanzi tutto se si tratta di un parallelogrammo, verificando che le diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ hanno lo stesso punto medio

$$M_{\overline{AC}}\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{1+9}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = (5;2)$$

$$M_{\overline{BD}}\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right) = \left(\frac{6+4}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = (5;2)$$

Per trattarsi di un rombo, deve avere le diagonali perpendicolari. Calcolo il coefficiente angolare delle due diagonali e verifico che sono uno l'antireciproco dell'altro:

$$m_{\overline{AC}} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0-4}{1-9} = \frac{1}{2} \qquad m_{\overline{BD}} = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \frac{0-4}{6-4} = -2$$

Essendo $m_{\overline{AC}} \cdot m_{\overline{BD}} = -1$, le due diagonali sono perpendicolari, perciò si tratta di un rombo.

49. Per il punto A (2; 3), conduci la parallela e la perpendicolare alla retta $2x - y - 4 = 0$ e determina la misura del perimetro del triangolo da esse formato con la retta $x = 4$.

La retta $2x - y - 4 = 0$ in forma esplicita diventa: $y = 2x - 4$, perciò ha coefficiente angolare 2. La parallela passante per A avrà anch'essa coefficiente angolare 2, mentre la perpendicolare avrà coefficiente angolare $-\frac{1}{2}$.

$$y - y_A = 2(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = 2(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1$$

$$y - y_A = -\frac{1}{2}(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Il rettangolo che si viene a formare è rettangolo nel vertice A (visto che le due rette sono tra loro perpendicolari). Determino i punti di intersezione delle due rette con la retta $x = 4$:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(4; 2)$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C(4; 7)$$

Determino la lunghezza dei due cateti e dell'ipotenusa:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

$\overline{BC} = |y_B - y_C| = 5$ Il perimetro è dato da: $2p = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 3\sqrt{5} + 5$

50. Determina k in modo che la retta $(k-1)x + y + k - 2 = 0$:
  a. risulti parallela all'asse y;
  b. risulti parallela all'asse x;
  c. passi per l'origine degli assi;
  d. passi per A (1; 2);
  e. non passi per B (-2; 3);
  f. passi per C (-1; 3);
  g. passi per E (-1; 1).

a) Perché la retta risulti parallela all'asse y, deve avere il coefficiente di y nullo. In questo caso non è possibile.

b) Perché la retta risulti parallela all'asse x, deve avere il coefficiente di x nullo, cioè: $\boxed{k=1}$

c) Per ottenere la retta passante per l'origine degli assi, sostituisco a x e y le coordinate dell'origine:

$$(k-1)\cdot 0 + 0 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=2}$$

d) Per ottenere la retta passante per A (1; 2), sostituisco a x e y le coordinate di A:

$$(k-1)\cdot 1 + 2 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k - 1 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

e) Per ottenere una retta che non passi per B (-2; 3), sostituisco a x e y le coordinate di B. Il valore di k che ottengo sarà quello per cui ottengo una retta passante per B: tutti i valori di k diversi da questo mi danno rette non passanti per B:

$$(k-1)\cdot(-2) + 3 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2k + 2 + 3 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k \neq 3}$$

f) Per ottenere la retta passante per C (-1; 3), sostituisco a x e y le coordinate di C:

$$(k-1)\cdot(-1) + 3 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -k + 1 + 3 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{imp.}$$

g) Per ottenere la retta passante per E (-1; 1), sostituisco a x e y le coordinate di E:

$$(k-1)\cdot(-1) + 1 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -k + 1 + 1 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall k \in R}$$