1. Siano date le due rette: $\mathrm{r}: \mathrm{x}-3\mathrm{y}-3=0$ e $\mathrm{s}: 3\mathrm{x}-\mathrm{y}-1=0$ che si intersecano nel punto A.
   a. Determina le equazioni delle bisettrici.
   b. Verifica che il punto C (6; 5) appartiene alla bisettrice con coefficiente angolare positivo.
   c. Detta t la retta parallela all'asse x e passante per C, determina le coordinate dei punti di intersezione di t con r e s e indicali, rispettivamente, con B e D.
   d. Verifica che $\overline{\mathrm{BD}} \cong 3\,\overline{\mathrm{CD}}$.
   e. Determina l'area del triangolo ABD.

Determino innanzi tutto le coordinate del punto A di intersezione, mettendo a sistema le equazioni delle due rette:

$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x-1 \\ y=-3x-1 \end{cases}$ riscrivendo le rette in forma esplicita, si nota che entrambe le equazioni hanno la stessa ordinata all'origine, perciò il punto A coincide con l'intersezione delle rette con l'asse y: $\boldsymbol{A\,(0;\ -1)}$

a. Determino le equazioni delle bisettrici: $\frac{|x-3y-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|3x-y-1|}{\sqrt{3^2+1^2}} \Rightarrow x-3y-3=\pm(3x-y-1)$

$x-3y-3=3x-y-1 \Rightarrow \boldsymbol{x+y+1=0}$

$x-3y-3=-3x+y+1 \Rightarrow \boldsymbol{x-y-1=0}$

b. Verifico che C appartiene alla bisettrice con coefficiente angolare positivo, ovvero sostituisco la coordinate di C nell'equazione della seconda bisettrice determinata: $6-5-1=0$. Le coordinate di C rendono l'equazione un'identità, perciò C appartiene alla seconda bisettrice.

c. La retta t parallela all'asse x e passante per C ha equazione $y=6$. Determino le sue intersezioni con le due rette date:

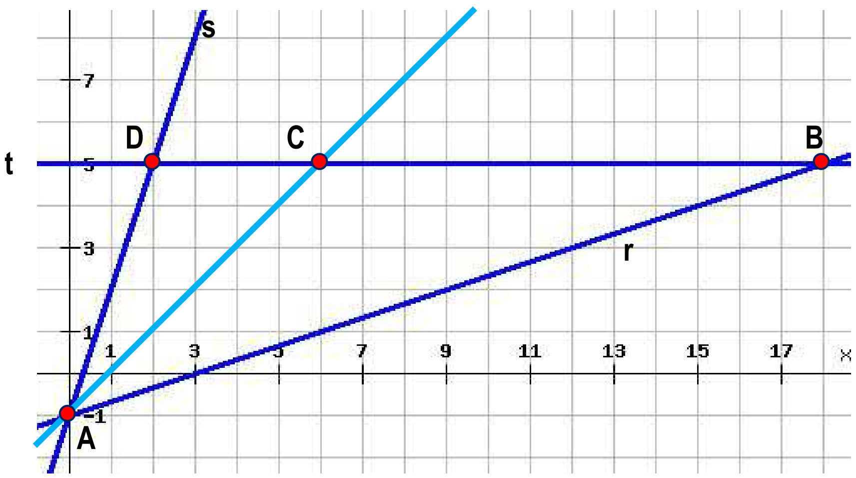
$$B: \begin{cases} y=5 \\ x-3y-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=18 \\ y=5 \end{cases} \qquad \boldsymbol{B\,(18;5)}$$

$$D: \begin{cases} y=5 \\ 3x-y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \qquad \boldsymbol{D\,(2;5)}$$

d. Verifico che $\overline{\mathrm{BC}} \cong 3\,\overline{\mathrm{CD}}$. Determinare la lunghezza dei segmenti è semplice, considerato che i punti in questione hanno la stessa ordinata: $|18-6|=3\,|2-6| \quad \Rightarrow \quad 12=3\cdot 4 \quad c.v.d.$

e. Determino l'area del triangolo ABD, usando come base il segmento $\overline{DB}$ e come altezza la distanza del punto A dalla retta t:

$$A_{ABD}=\frac{\overline{BD}\cdot d(A;t)}{2}=\frac{|18-2|\cdot|-1-5|}{2}=\boldsymbol{48}$$



2. Scrivi l'equazione del fascio generato dalle rette $3x - 4y + 2 = 0$ e $2x + 2y - 1 = 0$. Determina per quali valori del parametro la retta del fascio:
   a. passa per il punto A (1; 1)
   b. è parallela alla retta passante per i punti B (1; 6) e D (4; 15)
   c. interseca l'asse y in punti di ordinata positiva
   d. ha distanza dall'origine uguale a $\frac{2}{5}$

L'equazione del fascio è: $3x - 4y + 2 + k\,(2x + 2y - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{(3 + 2k)x + (2k - 4)y + 2 - k = 0}$

a. Determino il passaggio del fascio per il punto A, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$(3 + 2k) \cdot 1 + (2k - 4) \cdot 1 + 2 - k = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3 + 2k + 2k - 4 + 2 - k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = -\frac{1}{3}}$$

b. Determino il coefficiente angolare della retta passante per i punti B e D: $m_{\overline{BD}} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{15-6}{4-1} = 3$

Scrivo l'equazione del fascio in forma esplicita e pongo il coefficiente angolare del fascio uguale a 3:

$$y = \frac{2k + 3}{4 - 2k}\,x + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2k + 3}{4 - 2k} = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2k + 3 = 12 - 6k \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = \frac{9}{8}}$$

c. Tutte le rette corrispondono al requisito richiesto, tranne quella che coincide con l'asse x, ovvero quella che si ottiene per $\boldsymbol{k = 2.}$

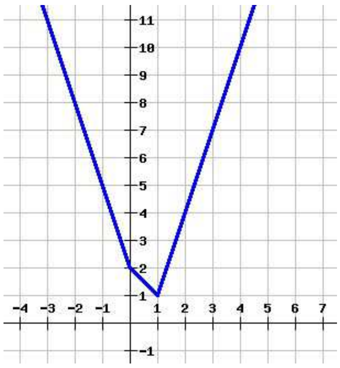
d. Pongo la distanza della generica retta del fascio dall'origine uguale a $\frac{2}{5}$:

$$\frac{|\,(3 + 2k)\ \cdot 0 + (2k - 4)\ \cdot 0 + 2 - k\,|}{\sqrt{(3 + 2k)^2 + \ (2k - 4)^2}} = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad 25\,(2 - k)^2 = 4\,(25 - 4k + 8k^2)$$

$$100 - 100k + 25k^2 = 100 - 16k + 32k^2 \quad \Longrightarrow \quad 7k^2 + 84k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = 0 \ \vee k = \ -12}$$

3. Rappresenta graficamente la funzione: $y = \ |\,2x - 2\,| + \ |\,x\,|$

$$y = \begin{cases} 2 - 3x & se\ x < 0 \\ 2 - x & se\ 0 \ \leq x < 1 \\ 3x - 2 & se\ x \geq 1 \end{cases}$$



4. Rappresenta nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} x \ \leq 1 \\ x + y - 1 \ \geq 0 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$