1. Determina i valori dei parametri reali *a* e *b* in modo che la funzione $y=\frac{x^3-ax}{x^2+bx+c}$ passi per il punto $(2;0)$, abbia come asintoto la retta $x=-3$ e abbia una discontinuità di terza specie in $x=-2$. Ricerca quindi gli ulteriori asintoti.

Se ha come asintoto la retta $x=-3$, significa che

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-ax}{x^2+bx+c}=\infty$$

E questo si può verificare solo se $3^2-3b+c=0$ ovvero $c=3b-9$.

Inoltre, se ha una discontinuità di terza specie in $x=-2$:

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^3-ax}{x^2+bx+3b-9}=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3-ax}{x^2+bx+3b-9}$$

e non esiste $f(-2)$, ovvero:

$$4-2b+3b-9=0 \qquad b=\mathbf{5}$$

E si deduce quindi, per quanto detto prima, che: $c=3b-9=\mathbf{6}$

Impongo infine il passaggio della funzione per il punto dato, sostituendo le coordinate del punto nella generica equazione della funzione:

$$0=\frac{8-2a}{4+2b+c} \quad\Rightarrow\quad 8-2a=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a=4}$$

La funzione richiesta è: $y=\frac{x^3-4x}{x^2+5x+6}$

Determino l'equazione dell'asintoto obliquo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x}{x^2+5x+6}\cdot\frac{1}{x}=1$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-4x}{x^2+5x+6}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x-x^3-5x^2-6x}{x^2+5x+6}=-5$$

L'equazione dell'asintoto obliquo è:

$$\boldsymbol{y=x-5}$$

2. Data la funzione: $f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{ax+3} & se\ x\geq 0\\ x^2+3\,x+b & se\ x<0\end{cases}$ Trova per quali valori di a e b la funzione ha un punto di discontinuità di prima specie in $x=0$ di salto 3 e passa per il punto $(1;-1)$.

Determino i due limiti, destro e sinistro, di 0:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-2}{ax+3}=-\frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to 0^-}(x^2+3x+b)=b$$

Essendo un punto di discontinuità di prima specie ed essendoci un salto pari a 3, si possono verificare due casi:

$$-\frac{2}{3}+3=b \quad\Rightarrow\quad b=\frac{7}{3} \qquad \text{oppure} \qquad -\frac{2}{3}=b+3 \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{11}{3}$$

Impongo il passaggio della funzione per il punto dato, sostituendo le coordinate del punto nella generica equazione della funzione:

$$-1=\frac{1-2}{a+3} \quad\Rightarrow\quad a+3=1 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a=-2}$$

Le funzioni richieste sono:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{-2x+3} & se\ x\geq 0\\ x^2+3x-\frac{7}{3} & se\ x<0\end{cases}} \qquad \boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{-2x+3} & se\ x\geq 0\\ x^2+3x+\frac{11}{3} & se\ x<0\end{cases}}$$

3. Determina a, b e c nella funzione $y=\frac{ax^3+bx^2-x}{cx^2-4}$, sapendo che il suo grafico ha come asintoti le rette $x=\pm\sqrt{2}$ e $y=\frac{5}{2}x+1$.

Se ha come asintoto la retta $x=\pm\sqrt{2}$, significa che

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{2}}\frac{ax^3+bx^2-x}{cx^2-4}=\infty$$

E questo si può verificare solo se $2c-4=0$ ovvero $\boldsymbol{c=+2}$.

Se ha come asintoto la retta $y=\frac{5}{2}x+1$, significa che

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2-x}{2x^2-4}\cdot\frac{1}{x}=\frac{a}{2}$$

E questo si può verificare solo se $\boldsymbol{a=+5}$.

Inoltre:

$$q=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3+bx^2-x}{2x^2-4}-\frac{5}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+bx^2-x-5x^3+10x}{2x^2-4}=\frac{b}{2}$$

E questo si può verificare solo se $\boldsymbol{b=2}$.

La funzione richiesta è:

$$\boldsymbol{y=\frac{5x^3+2x^2-x}{2x^2-4}}$$

4. Traccia il grafico probabile di: $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta.

Per determinare il dominio, pongo il denominatore diverso da zero, perciò: $x^2+1\neq 0$

$$\boldsymbol{D=\mathbb{R}}$$

Data la simmetria del dominio, verifico se si tratta di una funzione pari o dispari:

$$f(-x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)$$

Perciò la funzione è **pari**.

Determino le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani, mettendo a sistema l'equazione della funzione con quelle degli assi:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A\ (1;0)} \qquad \boldsymbol{B\ (-1;0)}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{C\ (0;-1)}$$

Determino gli intervalli di positività della funzione:

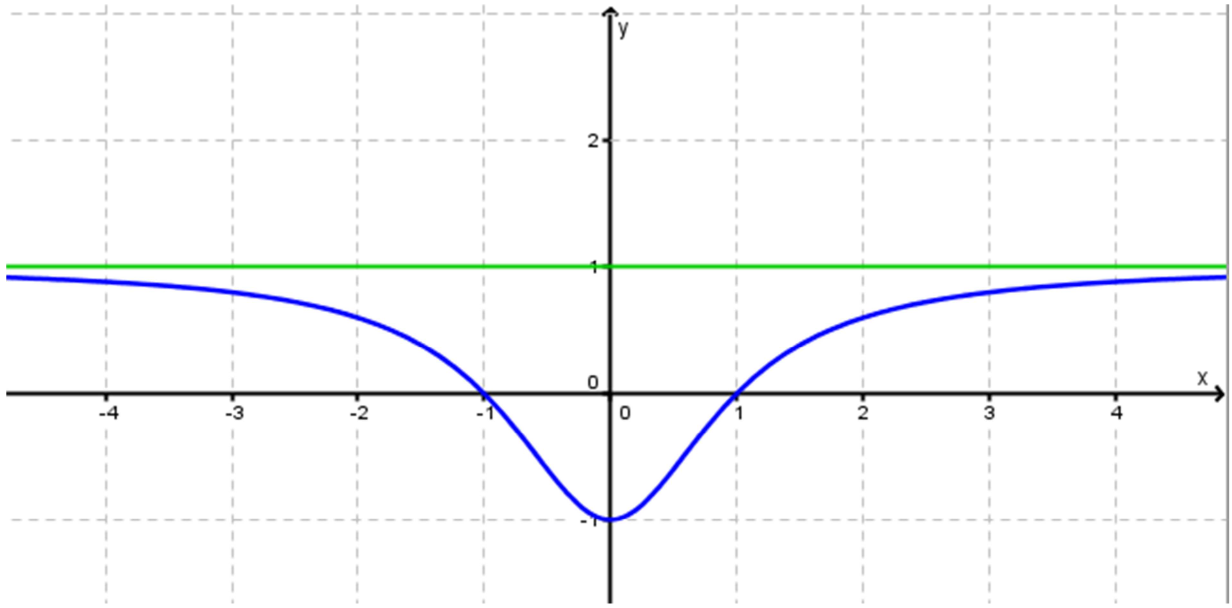
$$\frac{x^2-1}{x^2+1}>0 \qquad \begin{array}{l} N>0:\ x<-1 \ \vee \ x>1 \\ D>0:\ \forall x\in\mathbb{R} \end{array}$$

$$\boldsymbol{f(x)>0: x<-1 \ \vee \ x>1}$$

Determino gli eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1 \qquad \boldsymbol{y=1}\ \textit{asintoto orizzontale}$$

Il grafico della funzione è:



5. Traccia il grafico probabile di: $y = \log_4 \frac{3x}{x-1}$

Si tratta di una funzione trascendente.

Per determinare il dominio, pongo l'argomento del logaritmo maggiore di zero, perciò: $\frac{3x}{x-1} > 0$

$$\boldsymbol{D =]-\infty;\ 0[\cup]1;\ +\infty[}$$

Data l'asimmetria del dominio, sicuramente la funzione non sarà né pari né dispari.

Determino le eventuali intersezioni della funzione con l'asse x, non considerando l'asse y, che è invece escluso dal dominio:

$$\begin{cases} y = \log_4 \frac{3x}{x-1} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x}{x-1} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{A\left(-\frac{1}{2};0\right)}$$

Determino gli intervalli di positività della funzione:

$$\log_4 \frac{3x}{x-1} > 0 \qquad \frac{3x}{x-1} > 1 \qquad \frac{2x+1}{x-1} > 0$$

$$\boldsymbol{f(x) > 0:\ x < -\frac{1}{2} \ \vee\ x > 1}$$

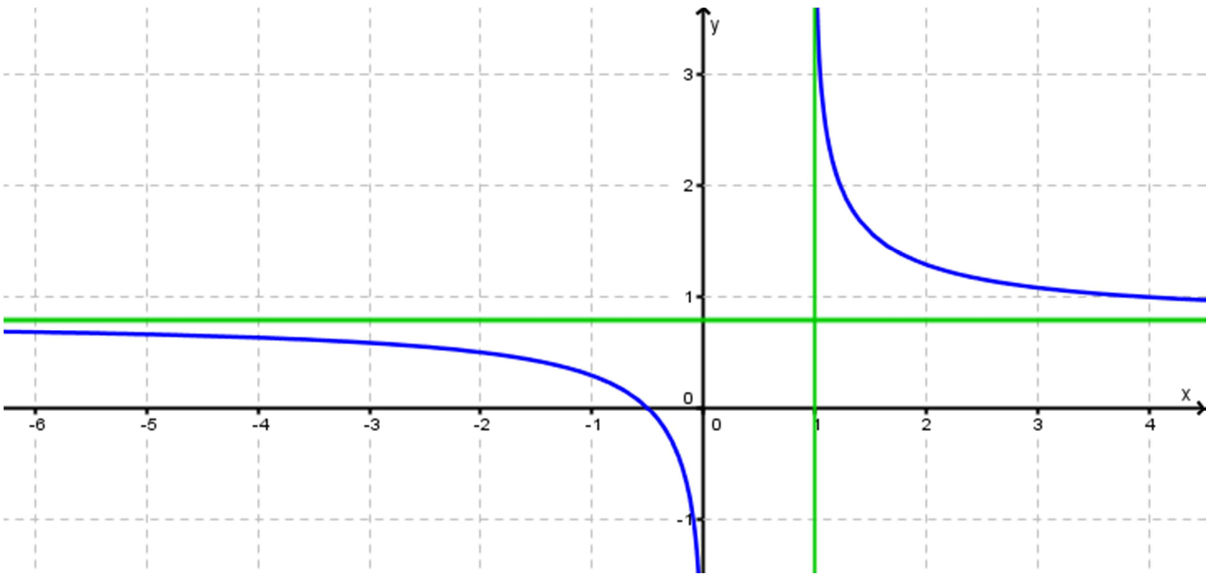
Determino gli eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log_4 \frac{3x}{x-1} = \log_4 3 \qquad \boldsymbol{y = \log_4 3}\ \ \textit{asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \log_4 \frac{3x}{x-1} = -\infty \qquad \boldsymbol{x = 0}\ \ \textit{asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \log_4 \frac{3x}{x-1} = +\infty \qquad \boldsymbol{x = 1}\ \ \textit{asintoto verticale}$$

Il grafico della funzione è:



6. Traccia il grafico probabile di: $y = 3^{\frac{5x}{x-2}} - 1$

Si tratta di una funzione trascendente.

Per determinare il dominio, pongo il denominatore dell'esponente dell'esponenziale diverso da zero, perciò: $x - 2 \neq 0$

$$\boldsymbol{D =]-\infty;\ 2[\cup]2;\ +\infty[}$$

Data l'asimmetria del dominio, sicuramente la funzione non sarà né pari né dispari.

Determino le eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y = 3^{\frac{5x}{x-2}} - 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3^{\frac{5x}{x-2}} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5x}{x-2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{O\ (0; 0)}$$

Non ho bisogno di determinare le intersezioni con l'asse y, visto che l'unica che c'è, l'origine, l'ho già trovata.

Determino gli intervalli di positività della funzione:

$$3^{\frac{5x}{x-2}} > 1 \qquad \frac{5x}{x-2} > 0$$

$$\boldsymbol{f(x) > 0: x < 0 \quad \vee \quad x > 2}$$

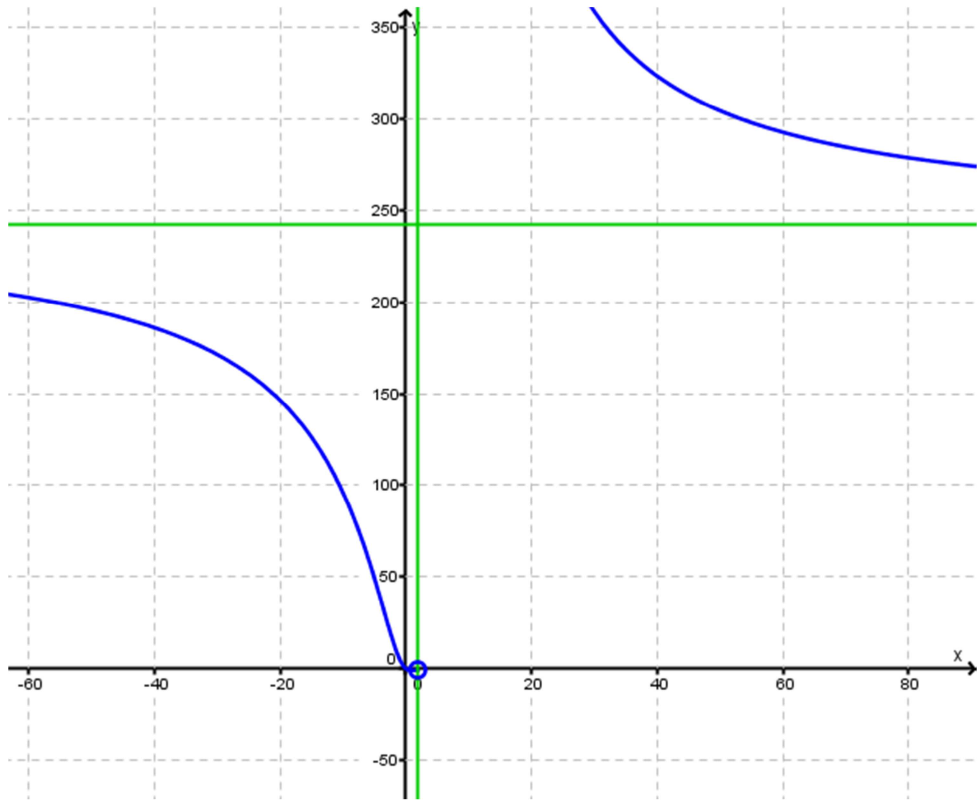
Determino gli eventuali asintoti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3^{\frac{5x}{x-2}} - 1 \right) = 3^5 - 1 \qquad \boldsymbol{y = 3^5 - 1}\ asintoto\ orizzontale$$

$$\lim_{x \to 2^-} \left(3^{\frac{5x}{x-2}} - 1 \right) = -1$$

$$\lim_{x \to 2^+} \left(3^{\frac{5x}{x-2}} - 1 \right) = +\infty \qquad \boldsymbol{x = 2}\ asintoto\ verticale\ (a\ destra)$$

Il grafico della funzione è:



Date le seguenti funzioni, individua i loro punti di discontinuità e la relativa specie:

7. $y = \frac{x^2-4x}{x^2-16}$

Determino innanzi tutto il dominio: $x \neq \pm 4$. Calcolo i limiti destro e sinistro di entrambi i valori:

$$\lim_{x \to 4^{\pm}} \frac{x\,(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \to 4^{\pm}} \frac{x}{x+4} = \frac{1}{2}$$

Ma non esiste la funzione nel punto 4, escluso dal dominio, perciò $x = 4$ è un punto di discontinuità di **terza specie**.

$$\lim_{x \to -4^{+}} \frac{x\,(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \to -4^{+}} \frac{x}{x+4} = -\infty$$

$x = -4$ è un punto di discontinuità di **seconda specie**.

8. $y = \frac{7x}{1+3^{\frac{x}{x-1}}}$

Determino innanzi tutto il dominio:

$$x \neq 1$$

Calcolo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \to 1^{+}} \frac{7x}{1+3^{\frac{x}{x-1}}} = 0 \qquad \lim_{x \to 1^{-}} \frac{7x}{1+3^{\frac{x}{x-1}}} = 7$$

$x = 1$ è un punto di discontinuità di **prima specie**.