1. Un'automobile si trova a passare in un tratto dell'autostrada Milano-Brescia sorvegliato dal sistema Tutor, dove il limite di velocità è di 130 km/h. A metà del tratto, l'autista si accorge di aver tenuto una velocità costante di 160 km/h e capisce di rischiare una contravvenzione. Quale dovrà essere la sua velocità nel resto del percorso, per essere sicuro di rispettare il limite di velocità?

$$v_L = 130\ km/h \qquad v_1 = 160\ km/h \qquad v_2?$$

La velocità è data, per definizione, da: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Per non incorrere in una contravvenzione, l'automobilista dovrà mantenere una velocità media pari alla velocità limite, perciò il rapporto tra l'intero tratto di autostrada e il tempo impiegato a percorrerlo dovrà dare come risultato la velocità limite.

Il tempo totale per percorre tale tratto sarà dato da: $\Delta t_L = \frac{s}{v_L}$. Tale tempo è dato da: $\Delta t_L = \Delta t_1 + \Delta t_2$, dove il primo intervallo di tempo Δt_1 è il tempo necessario per percorrere la prima metà del tratto $s/2$ con una velocità v_1, mentre il secondo, Δt_2, è il tempo per percorrere la seconda metà del tratto di strada $s/2$, ovvero:

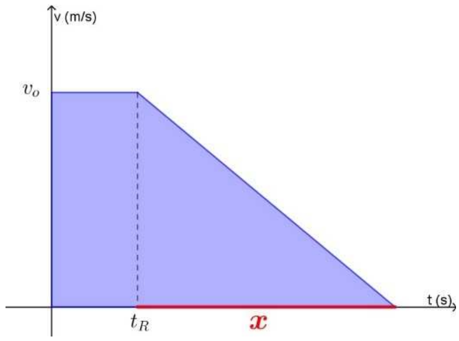
$$\Delta t_L = \Delta t_1 + \Delta t_2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t_2 = \Delta t_L - \Delta t_1 = \frac{s}{v_L} - \frac{s/2}{v_1} = \frac{s}{v_L} - \frac{s}{2v_1} = \frac{s}{2}\left(\frac{2}{v_L} - \frac{1}{v_1}\right)$$

È quindi possibile, a questo punto, determinare la velocità v_2:

$$v_2 = \frac{s_2}{\Delta t_2} = \frac{s/2}{s/2\left(\frac{2}{v_L} - \frac{1}{v_1}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{v_L} - \frac{1}{v_1}} = \frac{v_1 v_L}{2v_1 - v_L} = \mathbf{109\ km/h}$$

2. Un automobilista sta viaggiando alla velocità di 108 km/h, quando nota un ostacolo a 75 m di distanza. Supponendo che l'autista abbia un tempo di reazione di 1 s e sapendo che riesce a evitare l'ostacolo per un soffio, quanto dura la fase di decelerazione?

$$v_o = 108\ km/h = 30\ m/s \qquad d = 75\ m \qquad t_R = 1\ s \qquad t?$$



Il grafico velocità tempo della situazione descritta è rappresentato a lato. L'area colorata, quella sottesa dal grafico, rappresenta lo spazio percorso, e il tempo della fase di decelerazione è indicato dal segmento rosso. Usando l'area del trapezio è possibile determinare, velocemente, il tempo della fase di decelerazione:

$$d = \frac{v_o}{2} \cdot (t_R + t_R + x) \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{2d}{v_o} - 2t_R = \mathbf{3\ s}$$

3. Due auto stanno percorrendo un tratto di strada con una velocità di 90 km/h e si trovano a una distanza di 25 m. L'autista dell'auto che precede frena improvvisamente e il secondo automobilista, quando vede gli stop accesi, impiega 1,2 s per reagire.
   A. Se hanno la stessa decelerazione, il secondo automobilista riesce a fermarsi in modo da evitare l'impatto?
   B. A parità di decelerazione e tempo di reazione, che distanza di sicurezza dall'auto precedente avrebbe dovuto mantenere il secondo automobilista?

$$v_o = 90\ km/h = 25\ m/s \qquad d = 25\ m \qquad t_R = 1{,}2\ s \qquad a_A = a_B$$

A. La distanza d diminuisce nel momento in cui la macchina che precede (indichiamola con B) comincia a frenare. Nel momento in cui B comincia a frenare, per A comincia a scorrere il tempo di reazione, durante il quale il suo moto è ancora rettilineo uniforme. Siccome le due auto hanno la stessa decelerazione e partono dalla stessa velocità, hanno lo stesso spazio di frenata, perciò ciò che conta è il tempo percorso da A durante il tempo di reazione. Tale distanza deve essere minore di quella iniziale tra le due auto:

$$\frac{v^2 - v_o^2}{2a_A} + v_o t_R \le d + \frac{v^2 - v_o^2}{2a_B} \qquad \Rightarrow \qquad v_o t_R \le d$$

Ma $v_o t_R = 30\ m$, perciò, mantenendo la stessa decelerazione dell'auto che precede, l'automobilista **NON** riuscirebbe a evitare l'impatto.

B. Per riuscire a evitare l'impatto, la distanza di sicurezza deve essere maggiore, tutt'al più uguale, alla distanza percorsa durante il tempo di reazione, ovvero: $\mathbf{d \ge 30\ m}$.

4. Un'automobile viaggia alla velocità di 117 km/h. A un certo istante il conducente vede, davanti a sé, i fanali posteriori di un furgone che si muove alla velocità di 20,0 m/s e, quando la distanza tra i due veicoli si è ormai ridotta a 50,0 m, comincia a frenare.
   A. Determina il minimo valore (in modulo) dell'accelerazione che consente all'auto di non tamponare il furgone
   B. Rappresenta il grafico velocità-tempo della situazione descritta
   C. Quale distanza ha percorso l'auto prima di raggiungere il furgone?

$$v_o = 117\ km/h = 32{,}5\ m/s \qquad v_F = 20{,}0\ m/s \qquad d = 50{,}0\ m \qquad a?$$

A. L'auto si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, mentre il furgone procede con moto rettilineo uniforme. Dopo aver determinato le loro leggi orarie, pongo uguale la posizione finale:

$$\begin{cases} s = v_o t + \frac{1}{2}at^2 \\ s = d + v_F t \end{cases} \qquad v_o t + \frac{1}{2}at^2 = d + v_F t$$

Nell'equazione appena trovata ho due incognite, l'accelerazione e il tempo di frenata, ma posso sostituire all'accelerazione la sua definizione, data, in questo caso, da: $a = \frac{v_F - v_o}{t}$, dato che la velocità finale raggiunta dall'auto dovrebbe essere uguale a quella del furgone, per evitare il tamponamento:

$$v_o t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_F - v_o}{t} t^2 = d + v_F t \qquad \Rightarrow \qquad 2v_o t + v_F t - v_o t = 2d + 2v_F t$$

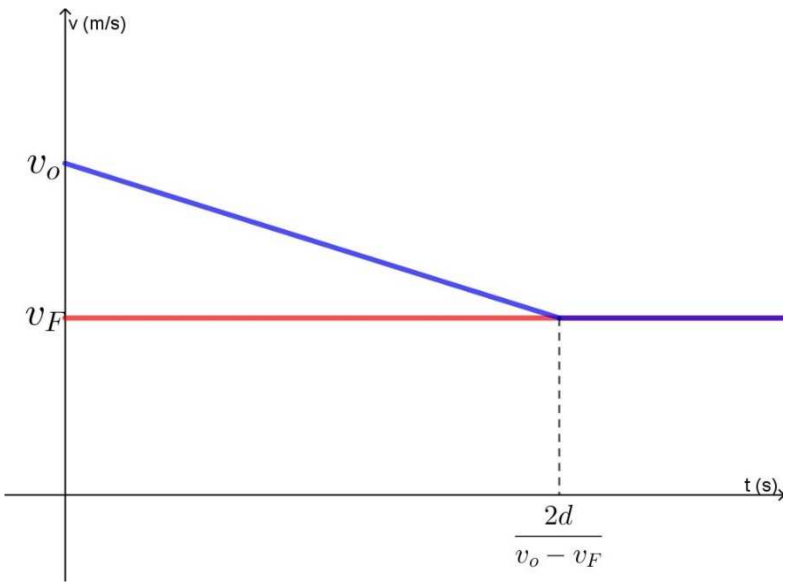
Da questa semplice equazione di primo grado, possiamo ricavare il tempo in funzione delle due velocità e della distanza tra i due veicoli:

$$v_o t - v_F t = 2d \qquad \Rightarrow \qquad t\,(v_o - v_F) = 2d \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{2d}{v_o - v_F}$$

Siccome è stata richiesta l'accelerazione, sostituisco l'espressione trovata nella definizione di accelerazione e calcolo il valore richiesto:

$$a = \frac{v_F - v_o}{t} = \frac{v_F - v_o}{\frac{2d}{v_o - v_F}} = -(v_o - v_F) \cdot \frac{v_o - v_F}{2d} = -\frac{(v_o - v_F)^2}{2d} = \mathbf{-1{,}56\ m/s^2}$$

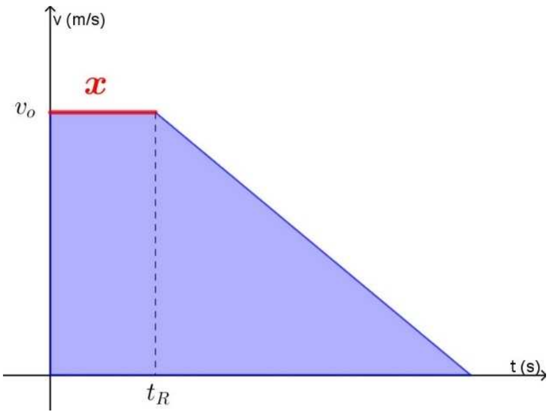
B. Dopo aver determinato l'istante in cui l'auto raggiunge il furgone (l'abbiamo ricavato nel punto precedente: $t = \frac{2d}{v_o - v_F} = 5{,}71\ s$), possiamo rappresentare il grafico velocità-tempo dei due moti, ricordando che il furgone si muove di moto rettilineo uniforme, ovvero procede con velocità costante, mentre l'auto decelera fino a quando raggiunge il furgone e poi procede con moto rettilineo uniforme, accodata al furgone.



C. Per procedere più rapidamente nel determinare lo spazio percorso dall'auto, basta determinare l'area sottesa dal grafico precedente, fino al punto in cui l'auto raggiunge il furgone, ovvero:

$$s = \frac{v_o + v_F}{2} \cdot \frac{2d}{v_o - v_F} = \mathbf{164\ m}$$

5. Svolgi a tua scelta uno dei seguenti quesiti:
   A. Lo spazio di arresto di un'auto, che si muoveva con una velocità iniziale v_o, è dato da s. Supponendo che la decelerazione durante la frenata sia data da a, dimostra che il tempo di reazione dell'automobilista è dato dall'espressione $t = \frac{2as+v_o^2}{2av_o}$.



Il grafico velocità tempo della situazione descritta è rappresentato a lato. L'area colorata, quella sottesa dal grafico, rappresenta lo spazio percorso, e il tempo di reazione è indicato dal segmento rosso. Usando l'area del trapezio è possibile determinare, velocemente, il tempo richiesto, ricordando che l'accelerazione è data da:

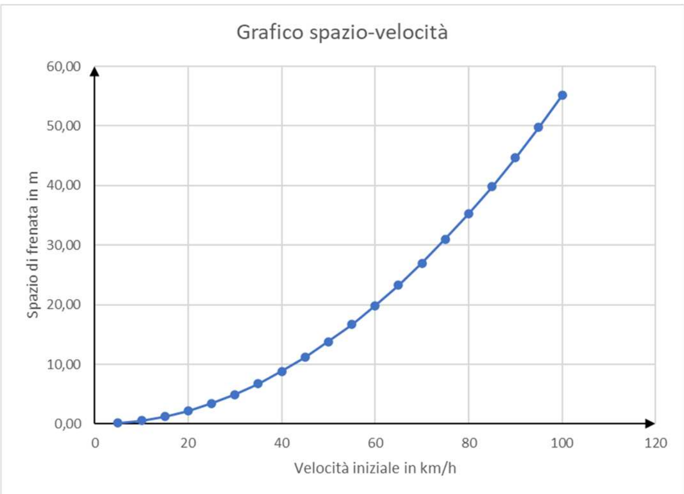
$$a = \frac{v - v_o}{t} = -\frac{v_o}{t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{v_o}{a}$$

Dove t è il tempo della frenata:

$$s = \frac{v_o}{2} \cdot (x + x + t) \quad \Rightarrow \quad 2x + t = \frac{2s}{v_o}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{s}{v_o} - \frac{t}{2} = \frac{s}{v_o} + \frac{v_o}{2a} = \frac{2as + v_o^2}{2av_o}$$

   B. Rappresenta qualitativamente il grafico del moto di arresto di un veicolo che si muoveva con velocità iniziale v_o, rappresentando lo spazio di frenata in funzione della velocità iniziale e motivando coerentemente le tue affermazioni.



Il grafico spazio-velocità evidenzia la dipendenza dello spazio di frenata dalla velocità iniziale del veicolo ed è rappresentato da un ramo di parabola, perché lo spazio di frenata dipende dal quadrato della velocità, infatti, ponendo una velocità finale uguale a zero nella frenata, otteniamo:

$$s = \frac{v^2 - v_o^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{v_o^2}{2a}$$

Il coefficiente $-\frac{1}{2a}$ è positivo, dato che l'accelerazione, essendo una decelerazione, è negativa e quindi la concavità della parabola è rivolta verso l'alto, come rappresentato a lato.