1. Un esperimento casuale consiste nel lanciare contemporaneamente un dado e una moneta. Determina lo spazio campionario:

$$\boldsymbol{S = \{(1;T); (2;T); (3;T); (4;T); (5;T); (6;T); (1;C); (2;C); (3;C); (4;C); (5;C); (6;C)\}}$$

Determina la probabilità dei seguenti eventi:

Escono un numero pari e croce: $\frac{3}{12} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

Esce testa: $\frac{6}{12} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

Escono un multiplo di 3 e testa: $\frac{2}{12} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

2. Il sacchetto della tombola contiene 90 numeri. Viene estratto un numero. Calcola la probabilità che esca:

A. un numero maggiore di 50: $\frac{40}{90} = \boldsymbol{\frac{4}{9}}$

B. un numero con due cifre diverse: $\frac{81-8}{90} = \boldsymbol{\frac{73}{90}}$

C. un numero multiplo di 4: $\frac{22}{90} = \boldsymbol{\frac{11}{45}}$

D. un numero primo inferiore a 20: $\frac{8}{90} = \boldsymbol{\frac{4}{45}}$

3. Un carico di frutta è composto al 40% da casse di pere e il resto da casse di mele. Viene aggiunto un secondo carico, senza pere e con lo stesso numero di casse di mele. Scegliendo una cassa a caso, qual è la probabilità di sceglierne una di pere?

Sia N il totale delle casse. Le casse di pere sono 0,4 N e le mele sono 0,6 N. Aggiungendo un secondo carico, senza pere, ma con lo stesso numero di casse di mele, ovvero 0,6 N, otteniamo un totale di 1,6 N casse delle quali 0,4 N sono di pere. La probabilità di scegliere una cassa di pere è quindi: $\frac{0{,}4\,N}{1{,}6\,N} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

4. Una scatola contiene 54 fra cioccolatini, caramelle e liquirizie. Sapendo che i cioccolatini sono il doppio delle liquirizie e che le caramelle sono i 3/2 delle liquirizie, calcola la probabilità di prendere a caso un cioccolatino o una caramella.

Sia L il numero delle liquirizie. I cioccolatini sono il doppio delle liquirizie, ovvero 2L e le caramelle sono 3/2 delle liquirizie, ovvero 3/2 L. Possiamo quindi calcolare la probabilità:

$$p(Cioc \cup Car) = \frac{2L + \frac{3}{2}L}{L + 2L + \frac{3}{2}L} = \frac{\frac{7}{2}L}{\frac{9}{2}L} = \boldsymbol{\frac{7}{9}}$$

5. Nel suo tratto di spiaggia, un bagnino ha 180 ombrelloni, a righe, a quadri o a fiori. Gli ombrelloni a quadri sono 44. La probabilità che venga assegnato a un bagnante un ombrellone a righe è 3/5. Qual è la probabilità che venga assegnato a caso un ombrellone a fiori?

Usiamo il teorema della probabilità contraria per determinare la probabilità che venga assegnato a caso un ombrellone a fiori:

$$p(F) = 1 - p(Q \cup R) = 1 - \big(p(Q) + p(R)\big) = 1 - p(Q) - p(R) = 1 - \frac{44}{180} - \frac{3}{5} = \boldsymbol{\frac{7}{45}}$$

6. In una scatola ci sono palline gialle, rosse e verdi. La probabilità che esca una pallina rossa o verde è 2/5. Le palline gialle sono 45. Il numero delle rosse è doppio di quello delle verdi. Quante sono le palline verdi?

Le palline gialle sono 45 e, per il teorema della probabilità contraria, possiamo ricavare che la probabilità di estrarre una pallina gialla è: $1 - p(R \cup V) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ e possiamo quindi determinare il totale delle palline, perché se T è il totale delle palline la probabilità delle palline gialle si ricava come rapporto tra il numero delle palline gialle e le palline totali, ovvero:

$$\frac{45}{T} = \frac{3}{5} \qquad T = \frac{5}{3} \cdot 45 = 75$$

Le palline rosse e quelle verdi in totale sono $75 - 45 = 30$ e, sapendo che quelle rosse sono il doppio di quelle verdi, indicate con $x$ le palline verdi, abbiamo: $2x + x = 30$, ovvero $x = 10$. In altre parole, le palline verdi sono **10**.

7. Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la somma delle facce sia un numero dispari, sapendo che le facce hanno numeri diversi.

Possiamo aiutarci a risolvere il problema con la rappresentazione a lato. Abbiamo escluso il caso delle due facce uguali e indicato con D il caso della somma dispari delle due facce (che si ottiene quando un dado ha un risultato dispari e l'altro pari), la probabilità quindi è: $\frac{18}{30} = \mathbf{\frac{3}{5}}$.

Per il teorema della probabilità condizionata, indicando con D il caso della somma dispari e con N il caso delle facce diverse (ovvero Non uguali), abbiamo:

$$p(D|N) = \frac{p(D \cap N)}{p(N)} = \frac{\frac{18}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{18}{30} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | D | | D | | D |
| 2 | D | | D | | D | |
| 3 | | D | | D | | D |
| 4 | D | | D | | D | |
| 5 | | D | | D | | D |
| 6 | D | | D | | D | |

8. Due macchine indipendenti compiono lo stesso tipo di lavorazione. La probabilità che la prima si guasti è del 2% e la probabilità che si guasti la seconda è del 3%. Calcola la probabilità che:
   A. entrambe le macchine siano guaste;
   B. sia guasta la prima e non la seconda;
   C. almeno una sia guasta.

Indicando la prima macchina con A e la seconda con B e ricordando che le due macchine sono indipendenti, otteniamo:

A. $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{2}{100} \cdot \frac{3}{100} = \mathbf{0,06\ \%}$

B. $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \cdot p(\bar{B}) = \frac{2}{100} \cdot \frac{97}{100} = \mathbf{1,94\ \%}$

C. $1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}) = 1 - \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{100} = \mathbf{4,94\ \%}$

9. Il Superenalotto è un gioco di fortuna. Da un'urna vengono estratti 6 numeri da 1 a 90; per vincere il primo premio bisogna indovinare tutti i 6 numeri che verranno pescati.
   A. Se in ogni giocata si scelgono 6 numeri, qual è la probabilità di vincere il primo premio con un'unica puntata?
   B. E qual è la probabilità che non esca nessuno dei sei numeri giocati?

A. Le estrazioni dei 6 numeri sono indipendenti una dall'altra, ma condizionate, nel senso che per la prima estrazione sceglierò tra 90 numeri, per la seconda tra 89 e così via. Inoltre, per la prima estrazione ho 6 casi favorevoli, per la seconda 5… e via scalando:

$$\frac{6}{90} \cdot \frac{5}{89} \cdot \frac{4}{88} \cdot \frac{3}{87} \cdot \frac{2}{86} \cdot \frac{1}{85} = \mathbf{\frac{1}{622\,614\,630}}$$

B. Per calcolare la probabilità che non esca nessuno dei sei numeri giocati, usiamo la probabilità contraria, ovvero:

$$\left(1 - \frac{6}{90}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{89}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{88}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{87}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{86}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{85}\right) = \mathbf{65\%}$$

10. Si hanno due scatole. La prima contiene 4 palline bianche e 6 rosse. La seconda ne contiene 3 bianche e 5 rosse. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina da ciascuna scatola, esse siano:
   A. entrambe bianche;
   B. bianca dalla prima scatola e rossa dalla seconda;
   C. una bianca e una rossa.

A. $p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{8} = \mathbf{\frac{3}{20}}$

B. $p(B_1 \cap R_2) = p(B_1) \cdot p(R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

C. In questo caso, dobbiamo considerare due casi: bianca dalla prima scatola e rossa dalla seconda o rossa dalla prima scatola e bianca dalla seconda:

$$p(B_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(R_2) + p(R_1) \cdot p(B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{8} = \mathbf{\frac{19}{40}}$$

11. Si hanno due mazzi da 40 carte. Da ciascuno viene estratta una carta. Calcola la probabilità che:
    A. le due carte siano due re;
    B. siano due figure;
    C. almeno una carta sia un asso.

Nel risolvere il problema, teniamo conto che i due eventi sono indipendenti:

A. $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \mathbf{\frac{1}{100}}$

B. $p(F_1 \cap F_2) = p(F_1) \cdot p(F_2) = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \mathbf{\frac{9}{100}}$

C. Per risolvere questo quesito, usiamo la probabilità contraria e quindi calcoliamo la probabilità del caso in cui nessuna delle due carte è un asso:

$$1 - p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = 1 - p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) = 1 - \frac{36}{40} \cdot \frac{36}{40} = 1 - \frac{81}{100} = \mathbf{\frac{19}{100}}$$