1. Dimostra che, traslando la circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ di centro C, secondo il vettore $\overrightarrow{CO}$, si ottiene una circonferenza di equazione $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$.

Determino il centro C della circonferenza: $C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$, perciò il vettore è $\overrightarrow{CO}=\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ e quindi la traslazione ha equazione:

$$\begin{cases} x'=x+\dfrac{a}{2} \\ y'=y+\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

La cui inversa è:

$$\begin{cases} x=x'-\dfrac{a}{2} \\ y=y'-\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della circonferenza, otteniamo:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+a\left(x-\frac{a}{2}\right)+b\left(y-\frac{b}{2}\right)+c=0$$

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2-by+\frac{b^2}{4}+ax-\frac{a^2}{2}+by-\frac{b^2}{2}+c=0$$

$$\boldsymbol{x^2+y^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$$

c.v.d.

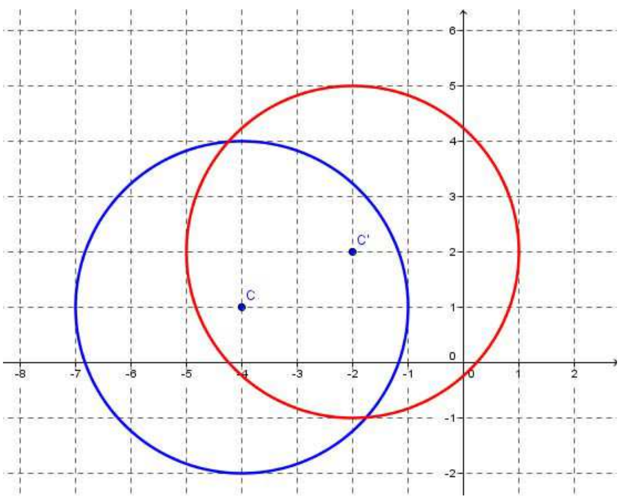
2. Una circonferenza di equazione $x^2+y^2+8x-2y+8=0$ viene traslata secondo un vettore $\vec{v}\,(k+1;2k-1)$. Determina k in modo che la circonferenza traslata abbia il centro sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante, scrivi l'equazione della circonferenza traslata e rappresenta graficamente le due circonferenze.

La circonferenza ha centro: $C\,(-4;1)$ e, traslandolo secondo il vettore dato, abbiamo: $C'(k-3;2k)$. Siccome il nuovo centro deve appartenere alla bisettrice di secondo e quarto quadrante, le sue coordinate devono essere una l'opposta dell'altra, perciò:

$$k-3=-2k \qquad \Longrightarrow \qquad k=1$$

La nuova circonferenza ha quindi centro $C'(-2;2)$ e raggio, come la circonferenza di partenza, pari a 3, perciò ha equazione:

$$(x+2)^2+(y-2)^2=9 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x^2+y^2+4x-4y-1=0}$$



3. Trova per quali valori di k e h la parabola di equazione $y = x^2 + (2k - h)x + 3h - 2$ è simmetrica di $y = -x^2 + 6x + 1$, rispetto al punto $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.

Determino le coordinate del vertice della parabola trasformata:

$$V'\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (3; 10)$$

Considerando le equazioni della simmetria centrale:

$$\begin{cases} x' = -x - 3 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$$

posso determinare le coordinate del vertice della parabola di partenza, ovvero:

$$V\,(-6;\ -8)$$

E, sostituendo le coordinate del vertice nell'equazione della parabola di partenza e ricavando l'ascissa generica del vertice e ponendola uguale a quella nota, ottengo il valore dei due parametri:

$$\begin{cases} -8 = 36 - 12k + 6h + 3h - 2 \\ \dfrac{h - 2k}{2} = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = -12 + 2k \\ -12k - 108 + 18k + 42 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{k = 11} \\ \boldsymbol{h = 10} \end{cases}$$

4. Determina la figura omotetica di centro $(2; 3)$ e rapporto $k = -2$ della circonferenza avente un diametro di estremi $A\,(-2; 1)$ e $B\,(4; 7)$.

Determino innanzi tutto le equazioni dell'omotetia:

$$\begin{cases} x' = k\,(x - x_C) + x_C \\ y' = k\,(y - y_C) + y_C \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = -2x + 6 \\ y' = -2y + 9 \end{cases}$$

Determino il centro e il raggio della circonferenza di diametro AB, trasformo il centro tramite l'omotetia e trovo la nuova circonferenza che avrà raggio doppio rispetto a quella di partenza:

$$C\left(\frac{-2+4}{2}; \frac{1+7}{2}\right) = (1; 4) \qquad r = AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$C'(4; 1) \qquad r' = 2r = 6\sqrt{2}$$

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 72 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x^2 + y^2 - 8x - 2y - 55 = 0}$$

Oppure, posso ricavare l'equazione della prima circonferenza e poi trasformarla tramite le equazioni inverse dell'omotetia:

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 18$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}x' + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}y' + \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}x + 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y - 55 = 0$$

5. Scrivi le equazioni della similitudine diretta σ che ha l'origine degli assi come punto unito e che porta $A\ (2;0)$ in $A'(6;2)$. Considera poi la trasformazione t_1 di equazioni: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x+1 \end{cases}$. Trova le equazioni di $t = t_1 \circ \sigma$.

Una similitudine che ha come punto unito l'origine ha generiche equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$$

Determino i due parametri, usando la trasformazione da A in A':

$$\begin{cases} 6 = 2a \\ 2 = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

Compongo le due trasformazioni:

$$P\ (x;y) \xrightarrow{\sigma} P'\ (3x-y; x+3y) \xrightarrow{t_1} P"\ (-x-3y; 3x-y+1)$$

Ovvero:

$$\boldsymbol{t}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = -x - 3y} \\ \boldsymbol{y' = 3x - y + 1} \end{cases}$$

6. Scrivi le equazioni dell'affinità che ha il determinante associato uguale a 5, trasforma il punto $A\ (2;1)$ in $A'(6;3)$, $B\ (0;3)$ in $B'(-2;1)$ e il punto $C\ (0;2)$ in un punto dell'asse x. Trova poi gli elementi uniti della trasformazione.

L'equazione generica dell'affinità è:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Consideriamo innanzi tutto le ordinate dei punti trasformati, per determinare i coefficienti a', b' e c':

$$\begin{cases} 3 = 2a' + b' + c' \\ 1 = 3b' + c' \\ 0 = 2b' + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 1 \\ c' = -2 \\ 3 = 2a' + 1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 2 \\ b' = 1 \\ c' = -2 \end{cases}$$

Siccome il determinante associato all'affinità è 5, ottengo l'equazione: $ab' - a'b = a - 2b = 5$. Unitamente alle ascisse dei punti trasformati, mi consente di trovare gli ultimi coefficienti dell'affinità:

$$\begin{cases} a - 2b = 5 \\ 6 = 2a + b + c \\ -2 = 3b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b + 5 \\ c = -2 - 3b \\ 4b + 10 + b - 2 - 3b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Le equazioni dell'affinità sono:

$$\begin{cases} x' = 3x - y + 1 \\ y' = 2x + y - 2 \end{cases}$$

Per determinare gli eventuali punti uniti:

$$\begin{cases} x = 3x - y + 1 \\ y = 2x + y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{cases}$$