1. Verifica che in ogni traslazione di vettore $\vec{v}\ (a; b)$ sono unite tutte le rette parallele al vettore $\vec{v}$.

Determino innanzi tutto le equazioni della traslazione e della sua inversa:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

Le rette parallele al vettore $\vec{v}$ hanno equazione: $y = \frac{b}{a}x + q$. Trasformo la retta data e verifico che è unita:

$$y' - b = \frac{b}{a}(x' - a) + q \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{b}{a}x + q$$

c.v.d.

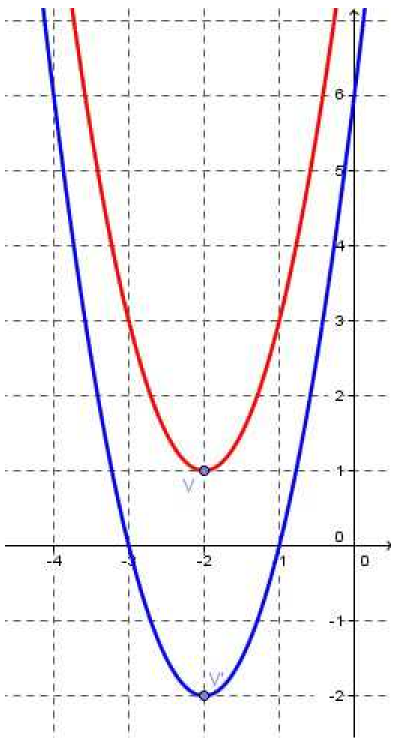
2. Una parabola di equazione $y = 2x^2 + 8x + 9$ viene traslata secondo un vettore $\vec{v}\ (k + 1; 2k - 1)$. Determina $k$ in modo che la parabola traslata abbia il vertice sulla bisettrice del primo e terzo quadrante, scrivi l'equazione della parabola traslata e rappresenta graficamente le due parabole.

La parabola ha vertice: $V\ (-2; 1)$ e, traslandolo secondo il vettore dato, abbiamo: $V'(k - 1; 2k)$. Siccome il nuovo vertice deve appartenere alla bisettrice di primo e terzo quadrante, le sue coordinate devono essere una l'opposta dell'altra, perciò:

$$k - 1 = 2k \qquad \Longrightarrow \qquad k = -1$$

La traslazione ha quindi equazioni: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases}$ e l'inversa ha equazioni: $\begin{cases} x = x' \\ y = y' + 3 \end{cases}$ che, sostituite nell'equazione della parabola di partenza, danno:

$$y + 3 = 2x^2 + 8x + 9 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y = 2x^2 + 8x + 6}$$



3. Trova per quali valori di $k$ e $h$ la circonferenza di equazione $x^2+y^2+(k-h)x+2hy+25=0$ è simmetrica di $x^2+y^2+3x-2y-\frac{3}{4}=0$, rispetto al punto $\left(-\frac{7}{4};2\right)$.

Determino le coordinate del centro della circonferenza trasformata:

$$C'\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2};1\right)$$

Considerando le equazioni della simmetria centrale e della sua inversa:

$$\begin{cases} x'=-x-\dfrac{7}{2} \\ y'=-y+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-x'-\dfrac{7}{2} \\ y=-y'+4 \end{cases}$$

posso determinare le coordinate del centro della circonferenza di partenza, ovvero:

$$C\ (-2;3)$$

E, ricavando le coordinate del centro nell'equazione della circonferenza di partenza e ponendole uguali a quelle appena trovate, avrò i valori dei parametri.

$$\begin{cases} -\dfrac{k-h}{2}=-2 \\ -h=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{h=-3} \\ \boldsymbol{k=1} \end{cases}$$

4. Determina la figura omotetica di centro $(3;-1)$ e rapporto $k=-3$ della circonferenza di centro $C\ (4;7)$ e passante per il punto $A\ (-2;1)$.

Determino innanzi tutto le equazioni dell'omotetia:

$$\begin{cases} x'=k\ (x-x_C)+x_C \\ y'=k\ (y-y_C)+y_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=-3x+12 \\ y'=-3y-4 \end{cases}$$

Determino il centro e il raggio della circonferenza di centro C e passante per A, trasformo il centro tramite l'omotetia e trovo la nuova circonferenza che avrà raggio triplo rispetto a quella di partenza:

$$r=AC=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

$$C'(0;-25) \qquad r'=3r=18\sqrt{2}$$

$$(x-0)^2+(y+25)^2=648 \Rightarrow \boldsymbol{x^2+y^2+50y-23=0}$$

Oppure, posso ricavare l'equazione della prima circonferenza e poi trasformarla tramite le equazioni inverse dell'omotetia:

$$(x-4)^2+(y-7)^2=72$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}x'+4 \\ y=-\dfrac{1}{3}y'-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{3}x\right)^2+\left(-\frac{1}{3}y-\frac{25}{3}\right)^2=72 \Rightarrow \frac{1}{9}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{50}{9}y-\frac{23}{9}=0$$

5. Date le equazioni $\sigma: \begin{cases} x' = 2ax - (3a-1)y \\ y' = (3a-1)x + (a+3)y \end{cases}$

determina il valore di $a$ in modo che rappresentino una similitudine diretta di rapporto 10.
Data la traslazione $t_1$ di vettore $\vec{v}\ (2;1)$, trova le equazioni di $t = t_1 \circ \sigma$.

Il rapporto di una similitudine è dato dalla radice quadrata del determinante della matrice associata, ovvero:

$$2a\,(a+3) + (3a-1)^2 = 100$$

$$2a^2 + 6a + 9a^2 - 6a + 1 - 100 = 0$$

$$11a^2 = 99 \quad \Longrightarrow \quad a^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad a = \pm 3$$

Siccome i due coefficienti $2a$ e $a+3$ devono essere uguali, posso avere come soluzione solo $a = 3$, perciò la similitudine ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = 6x - 8y \\ y' = 8x + 6y \end{cases}$$

La traslazione ha invece equazioni: $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

Compongo le due trasformazioni:

$$P\,(x;y) \overset{\sigma}{\to} P'\,(6x-8y; 8x+6y) \overset{t_1}{\to} P"\,(7x-8y+2; 8x+7y+1)$$

Ovvero:

$$\boldsymbol{t}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = 7x - 8y + 2} \\ \boldsymbol{y' = 8x + 7y + 1} \end{cases}$$

6. Scrivi le equazioni dell'affinità che ha il determinante associato uguale a 1, trasforma il punto $A\ (2;2)$ in $A'(3;1)$, $B\ (0;1)$ in $B'(-2;3)$ e il punto $C\ (3;4)$ in un punto dell'asse x. Trova poi gli elementi uniti della trasformazione.

L'equazione generica dell'affinità è:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Consideriamo innanzi tutto le ordinate dei punti trasformati, per determinare i coefficienti $a'$, $b'$ e $c'$:

$$\begin{cases} 1 = 2a' + 2b' + c' \\ 3 = b' + c' \\ 0 = 3a' + 4b' + c' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -a' - b' = 1 \\ 3 = b' + c' \\ 1 = -2b' - 2 + 2b' + 3 - b' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a' = -1 \\ b' = 0 \\ c' = 3 \end{cases}$$

Siccome il determinante associato all'affinità è 1, ottengo l'equazione: $ab' - a'b = b = 1$. Unitamente alle ascisse dei punti trasformati, mi consente di trovare gli ultimi coefficienti dell'affinità:

$$\begin{cases} b = 1 \\ 3 = 2a + 2b + c \\ -2 = b + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -3 \\ 3 = 2a + 2 - 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Le equazioni dell'affinità sono:

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 3 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$$

Per determinare gli elementi uniti:

$$\begin{cases} x = 2x + y - 3 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{x + y - 3 = 0}$$